方差分析

续本达

清华大学 工程物理系

2023-11-29

复习

假设检验

1. 根据实际问题所关心的内容，建立 H_0 与 H_1
2. 在 H_0 为真时，选择合适的统计量 Z
3. 由 H_1 确定拒绝域形式。给定显著性水平 α，确定拒绝域
4. 根据样本观测值计算，并作出相应的判断.

小概率原理

- 小概率由研究者事先确定，一般取 $1\,\%$，$5\,\%$ 或 $10\,\%$。小概率的取值不同，假设检验的结果可能不同。在统计学中，小概率又叫显著性水平，因此，假设检验又称为显著性检验。

正态总体

1. 单个总体均值 μ： Z 检验；t 检验
2. 单个正态总体方差：χ^2 检验

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

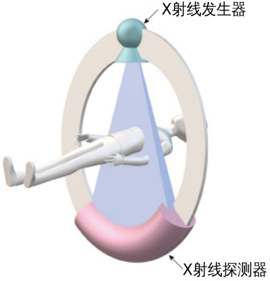
已知两个总体的假设检验仍然可用 Z 检验或 T 检验的方法，对两个总体的均值或方差是否有显著性差异进行检验。

引例

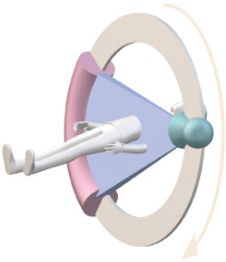
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

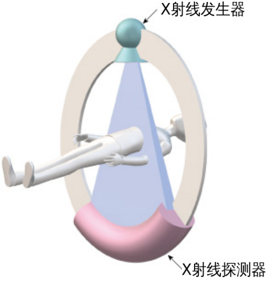
$$X\text{ 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛。

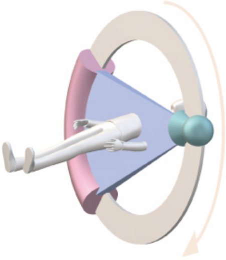
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

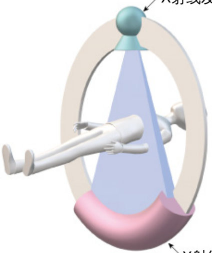
$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛。

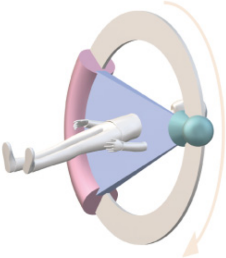
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

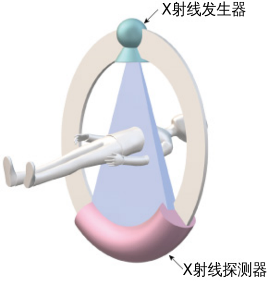
$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛。

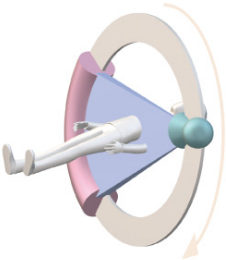
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

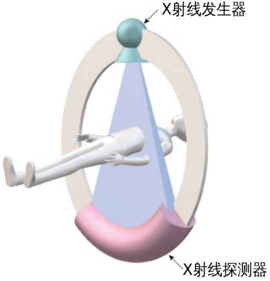
$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛。

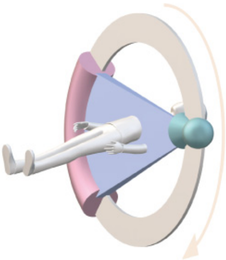
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描

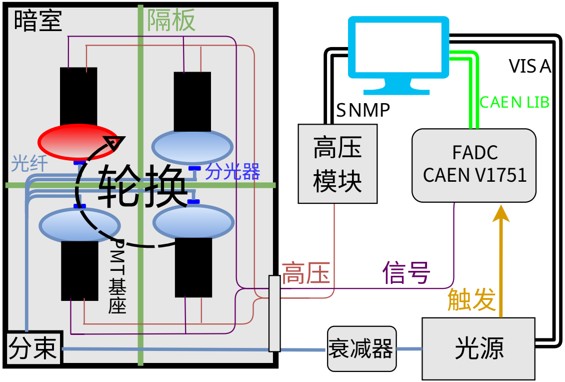


- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛。

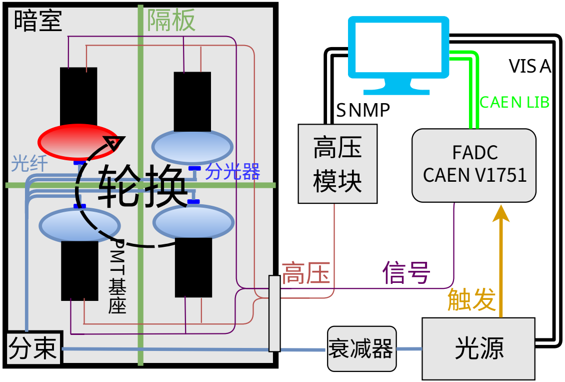
测量光电倍僧管（PMT）的光子检测效率



- 将参考管在四个暗室中轮换，同时测量四支 PMT 以降低统计误差。
- 目标：将国产（蓝色）PMT 的性能与进口（红色）PMT 进行对比。

Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment, NIM A, (1055)168506, 2023

测量光电倍增管（PMT）的光子检测效率



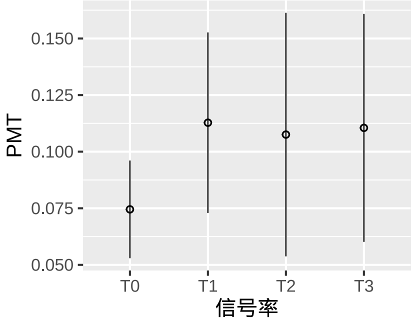
- 将参考管在四个暗室中轮换，同时测量四支 PMT 以降低统计误差。
- 目标：将国产（蓝色）PMT 的性能与进口（红色）PMT 进行对比。

Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment, NIM A, (1055)168506, 2023

实验结果

- 将 4 支 PMT 置于 4 个暗室，共完成 7 组轮换。

PMT	实验次数	信号率均值	方差
T0	28	0.0715	0.0009
T1	28	0.1095	0.0024
T2	28	0.1067	0.0039
T3	28	0.1051	0.0032
总计	112	0.0982	0.0028

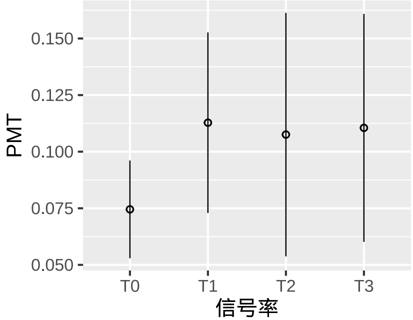


实验测量能够得到国产 PMT T1、T2、T3 的检测效率优于进口 T0 的结论吗?

实验结果

- 将 4 支 PMT 置于 4 个暗室，共完成 7 组轮换。

PMT	实验次数	信号率均值	方差
T0	28	0.0715	0.0009
T1	28	0.1095	0.0024
T2	28	0.1067	0.0039
T3	28	0.1051	0.0032
总计	112	0.0982	0.0028



实验测量能够得到国产 PMT T1、T2、T3 的检测效率优于进口 T0 的结论吗?

术语约定

因素 影响试验指标的条件，包括可控因素和不可控因素。

水平 因素所处的状态。

考察四支 PMT 有无明显差异

试验指标 PMT 的信号率。

因素 影响 PMT 信号率的条件。

- 可控因素：用哪支 PMT 做实验、放在哪个暗室中；
- 不可控因素：每次实验环境温度与湿度的变化。

水平 用 T0 号 PMT 在暗室 B 实验，那么 PMT 的水平是 T0，暗室的水平是 B。

试验目标 判断 PMT 因素对试验指标是否有显著影响。

术语约定

因素 影响试验指标的条件，包括可控因素和不可控因素。

水平 因素所处的状态。

考察四支 PMT 有无明显差异

试验指标 PMT 的信号率。

因素 影响 PMT 信号率的条件。

- 可控因素：用哪支 PMT 做实验、放在哪个暗室中；
- 不可控因素：每次实验环境温度与湿度的变化。

水平 用 T0 号 PMT 在暗室 B 实验，那么 PMT 的水平是 T0，暗室的水平是 B。

试验目标 判断 PMT 因素对试验指标是否有显著影响。

术语约定

因素 影响试验指标的条件，包括可控因素和不可控因素。

水平 因素所处的状态。

考察四支 PMT 有无明显差异

试验指标 PMT 的信号率。

因素 影响 PMT 信号率的条件。

- 可控因素：用哪支 PMT 做实验、放在哪个暗室中；
- 不可控因素：每次实验环境温度与湿度的变化。

水平 用 T0 号 PMT 在暗室 B 实验，那么 PMT 的水平是 T0，暗室的水平是 B。

试验目标 判断 PMT 因素对试验指标是否有显著影响。

平方和分解

从样本方差到偏差平方和

- 112 个实验结果，按照所用的 PMT ，分成 T0、T1、T2、T3 四个组；
- 第 i 组的第 j 个实验结果记为 X_{ij}，总平均值记 $\overline{X}$。

样本方差 s^2

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\underbrace{X_{ij}-\overline{X}}_{\text{偏差}})^2$$

专注于平方和：

偏差平方和，记为 S_T

$$S_T = (N-1)s^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

S_T 反映了所有观测值 X_{ij} 之间总的差异程度。

从样本方差到偏差平方和

- 112 个实验结果，按照所用的 PMT ，分成 T0、T1、T2、T3 四个组；
- 第 i 组的第 j 个实验结果记为 X_{ij}，总平均值记 $\overline{X}$。

样本方差 s^2

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\underbrace{X_{ij}-\overline{X}}_{\text{偏差}})^2$$

专注于平方和：

偏差平方和，记为 S_T

$$S_T = (N-1)s^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

S_T 反映了所有观测值 X_{ij} 之间总的差异程度。

从样本方差到偏差平方和

- 112 个实验结果，按照所用的 PMT ，分成 T0、T1、T2、T3 四个组；
- 第 i 组的第 j 个实验结果记为 X_{ij}，总平均值记 $\overline{X}$。

样本方差 s^2

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\underbrace{X_{ij}-\overline{X}}_{\text{偏差}})^2$$

专注于平方和：

偏差平方和，记为 S_T

$$S_T = (N-1)s^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

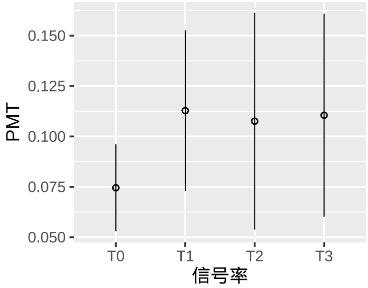
S_T 反映了所有观测值 X_{ij} 之间总的差异程度。

总偏差平方和分解

$$S_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}[(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot}) - (\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A} - 2\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})}_{=0}$$

- 记第 i PMT 平均信号率为 $\overline{X}_{i\cdot}$;
- S_E 反映同样条件下测量的随机误差;
- S_A 反映了因素对试验指标的影响

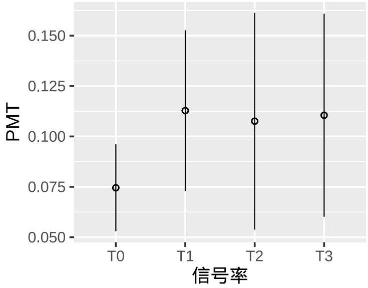


总偏差平方和分解

$$S_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}[(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot}) - (\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A} - 2\sum_{i=1}^{4}\underbrace{\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})}_{=0}$$

- 记第 i PMT 平均信号率为 $\overline{X}_{i\cdot}$；
- S_E 反映同样条件下测量的随机误差；
- S_A 反映了因素对试验指标的效应

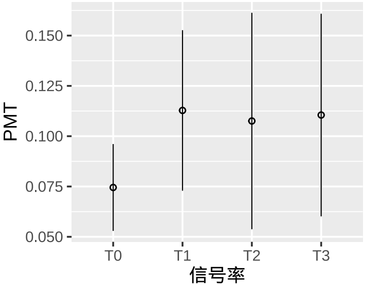


总偏差平方和分解

$$S_T=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}[(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})-(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})]^2$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E}+\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A}-2\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})}_{=0}$$

- 记第 i PMT 平均信号率为 $\overline{X}_{i\cdot}$；
- S_E 反映同样条件下测量的随机误差；
- S_A 反映了因素对试验指标的效应。

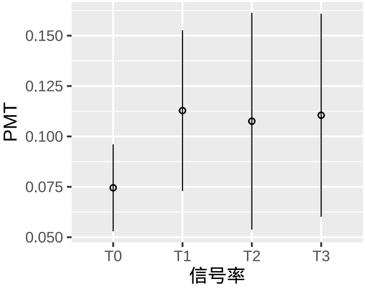


总偏差平方和分解

$$S_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}[(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot}) - (\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A} -2\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})}_{=0}$$

- 记第 i PMT 平均信号率为 $\overline{X}_{i\cdot}$；
- S_E 反映同样条件下测量的随机误差；
- S_A 反映了因素对试验指标的效应。

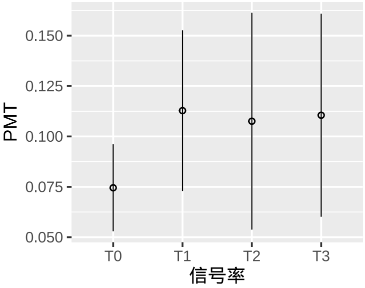


总偏差平方和分解

$$S_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}[(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot}) - (\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})]^2$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A} - 2\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})}_{=0}$$

- 记第 i PMT 平均信号率为 $\overline{X}_{i\cdot}$；
- S_E 反映同样条件下测量的随机误差；
- S_A 反映了因素对试验指标的效应。



变差的 χ^2 分解

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2}_{\text{偏差平方和}S_T} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A}$$

- 假设 H_0 成立，四个组没有区别，是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

$$\begin{cases} \dfrac{S_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-1) \\ \dfrac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(4-1) \\ \dfrac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-4) \end{cases}$$

- 可以证明 S_A 与 S_E 独立；
- 因此平方和与自由度具有可加性。

$$S_T = S_A + S_E$$
$$\nu_T = \nu_A + \nu_E$$

变差的 χ^2 分解

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2}_{\text{偏差平方和}S_T} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A}$$

- 假设 H_0 成立，四个组没有区别，是正态总体 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

$$\begin{cases} \dfrac{S_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-1) \\ \dfrac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(4-1) \\ \dfrac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-4) \end{cases}$$

- 可以证明 S_A 与 S_E 独立；
- 因此平方和与自由度具有可加性。

$$S_T = S_A + S_E$$
$$\nu_T = \nu_A + \nu_E$$

变差的 χ^2 分解

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X})^2}_{\text{偏差平方和}S_T} = \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(X_{ij}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{误差平方和}S_E} + \underbrace{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{28}(\overline{X}-\overline{X}_{i\cdot})^2}_{\text{效应平方和}S_A}$$

- 假设 H_0 成立，四个组没有区别，是正态总体 $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

$$\begin{cases} \dfrac{S_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-1) \\ \dfrac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(4-1) \\ \dfrac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(112-4) \end{cases}$$

- 可以证明 S_A 与 S_E 独立；
- 因此平方和与自由度具有可加性。

$$S_T = S_A + S_E$$
$$\nu_T = \nu_A + \nu_E$$

表格汇总

平方和分解与对应的 χ^2 自由度汇总如下：

	自由度	平方和	平方和/自由度
PMT 因素	3	0.027	0.0090
误差	108	0.280	0.0026
总和	111	0.307	

误差和 PMT 因素哪个起主导作用?

表格汇总

平方和分解与对应的 χ^2 自由度汇总如下：

	自由度	平方和	平方和/自由度
PMT 因素	3	0.027	0.0090
误差	108	0.280	0.0026
总和	111	0.307	

误差和 PMT 因素哪个起主导作用?

方差分析

假设检验“四步曲”

提出原假设 H_0: 各组原自同一正态总体
各 PMT 的光子检测效率相同

构造 F 统计量
用已知分布获得推论

设定拒绝域：使用小概率原理
定义推论为“假”的区域
使用显著水平与分位数决定

计算并给出结论
由逆否命题判定原假设不成立

- 构造统计量为

$$F = \frac{S_A/\nu_A}{S_E/\nu_E}$$

假设检验“四步曲”

提出原假设 H_0: 各组原自同一正态总体
各 PMT 的光子检测效率相同

构造 F 统计量
用已知分布获得推论

设定拒绝域：使用小概率原理
定义推论为“假”的区域
使用显著水平与分位数决定

计算并给出结论
由逆否命题判定原假设不成立

- 构造统计量为

$$F = \frac{S_A/\nu_A}{S_E/\nu_E}$$

假设检验“四步曲”

提出原假设 H_0: 各组原自同一正态总体
各 PMT 的光子检测效率相同

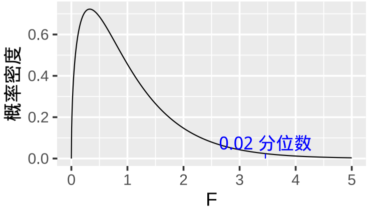
构造 F 统计量
用已知分布获得推论

设定拒绝域：使用小概率原理
定义推论为“假”的区域
使用显著水平与分位数决定

计算并给出结论
由逆否命题判定原假设不成立

- 构造统计量为

$$F = \frac{S_A/\nu_A}{S_E/\nu_E}$$



均方

均方

变异程度除与偏差平方和的大小有关外，还与其自由度有关，由于各部分自由度不相等，因此各部分偏差平方和不能直接比较，须将各部分偏差平方和除以相应自由度，其比值称为 **均方差** ，简称 **均方** (mean square)。

总均方 $\overline{S_T} = \frac{S_T}{\nu_T}$

组间均方 $\overline{S_A} = \frac{S_A}{\nu_A}$

组内均方 $\overline{S_E} = \frac{S_E}{\nu_E}$

F 统计量

F 统计量是组间均方与组内均方的比值。

均方

均方

变异程度除与偏差平方和的大小有关外，还与其自由度有关，由于各部分自由度不相等，因此各部分偏差平方和不能直接比较，须将各部分偏差平方和除以相应自由度，其比值称为 均方差 ，简称 均方 (mean square)。

总均方 $\overline{S_T} = \frac{S_T}{\nu_T}$

组间均方 $\overline{S_A} = \frac{S_A}{\nu_A}$

组内均方 $\overline{S_E} = \frac{S_E}{\nu_E}$

F 统计量

F 统计量是组间均方与组内均方的比值。

假设检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\text{不全相等}$$

- 如果各组样本的总体均值相等，即各处理组的样本来自相同总体，无处理因素的作用，则组间变异同组内变异一样，只反映随机误差作用的大小。 F 值在理论上应等于 1。
- 若处理因素对研究结果有影响，将出现 $\overline{S_A}$ 明显大于 $\overline{S_E}$，F 值也明显大于 1。 F 值越大，拒绝 H_0 的理由越充分。
- 根据计算出的检验统计量 F 值，按所取检验水准 α 作出统计推断结论。
- $F < F_\alpha(\nu_A, \nu_E)$，不拒绝 H_0，不能认为各样本所来自的总体均数不同;
  - 反之，认为各样本所来自的总体均数不全相等。

假设检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\text{不全相等}$$

- 如果各组样本的总体均值相等，即各处理组的样本来自相同总体，无处理因素的作用，则组间变异同组内变异一样，只反映随机误差作用的大小。F 值在理论上应等于 1。
- 若处理因素对研究结果有影响，将出现 $\overline{S_A}$ 明显大于 $\overline{S_E}$，F 值也明显大于 1。F 值越大，拒绝 H_0 的理由越充分。
- 根据计算出的检验统计量 F 值，按所取检验水准 α 作出统计推断结论。
- $F < F_\alpha(\nu_A, \nu_E)$，不拒绝 H_0，不能认为各样本所来自的总体均数不同;

假设检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\text{不全相等}$$

- 如果各组样本的总体均值相等，即各处理组的样本来自相同总体，无处理因素的作用，则组间变异同组内变异一样，只反映随机误差作用的大小。 F 值在理论上应等于 1。
- 若处理因素对研究结果有影响，将出现 $\overline{S_A}$ 明显大于 $\overline{S_E}$，F 值也明显大于 1。F 值越大，拒绝 H_0 的理由越充分。
- 根据计算出的检验统计量 F 值，按所取检验水准 α 作出统计推断结论。
- $F < F_\alpha(\nu_A, \nu_E)$，不拒绝 H_0，不能认为各样本所来自的总体均数不同;
  - 反之，认为各样本所来自的总体均数不全相等。

假设检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\text{不全相等}$$

- 如果各组样本的总体均值相等，即各处理组的样本来自相同总体，无处理因素的作用，则组间变异同组内变异一样，只反映随机误差作用的大小。 F 值在理论上应等于 1。
- 若处理因素对研究结果有影响，将出现 $\overline{S_A}$ 明显大于 $\overline{S_E}$，F 值也明显大于 1。F 值越大，拒绝 H_0 的理由越充分。
- 根据计算出的检验统计量 F 值，按所取检验水准 α 作出统计推断结论。
- $F < F_\alpha(\nu_A, \nu_E)$，不拒绝 H_0，不能认为各样本所来自的总体均数不同;
  - 反之，认为各样本所来自的总体均数不全相等。

假设检验

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\text{不全相等}$$

- 如果各组样本的总体均值相等，即各处理组的样本来自相同总体，无处理因素的作用，则组间变异同组内变异一样，只反映随机误差作用的大小。 F 值在理论上应等于 1。
- 若处理因素对研究结果有影响，将出现 $\overline{S_A}$ 明显大于 $\overline{S_E}$，F 值也明显大于 1。F 值越大，拒绝 H_0 的理由越充分。
- 根据计算出的检验统计量 F 值，按所取检验水准 α 作出统计推断结论。
- $F < F_\alpha(\nu_A, \nu_E)$，不拒绝 H_0，不能认为各样本所来自的总体均数不同;
  - 反之，认为各样本所来自的总体均数不全相等。

方差分析

```r
v <- aov(PDE~PMT, data=rates)
print(summary(v))
```

	自由度	平方和	平方和/自由度	F	p-值
PMT 因素	3	0.027	0.0090	3.452	0.0191
误差	108	0.280	0.0026		
总和	111	0.307			

- 当显著水平取 0.001 时，不能拒绝原假设。
  不能确定 PMT 因素对试验结果造成影响。

参数估计

样本方差

- 涉及几个样本，它们的均值可能不同。样本方差由

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-s}$$

估计

两个群体差 μ_1, μ_2 的区间估计

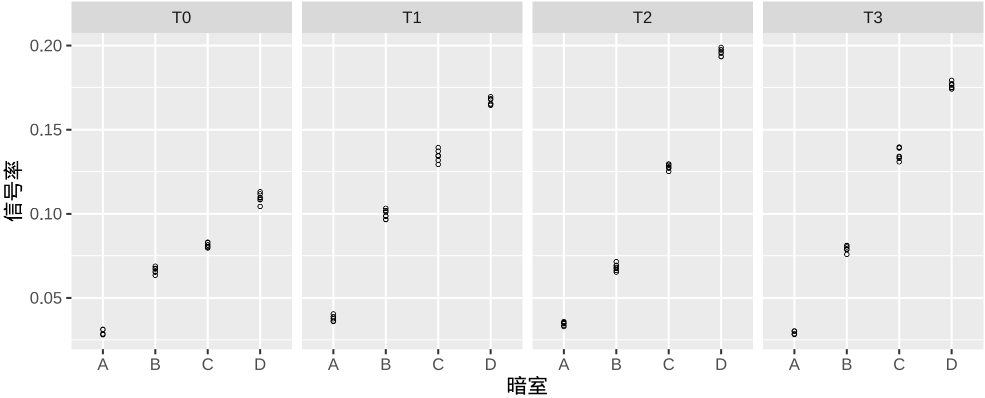
$$\frac{\overline{X}_{\cdot 1} - \overline{X}_{\cdot 2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_E\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n-s)$$

置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为上下限为

$$\overline{X}_{\cdot 1} - \overline{X}_{\cdot 2} \pm t_{\alpha/2}(n-s)\sqrt{S_E\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

多因素试验

考虑多种因素



- 各个暗室光强有较大的不同。
- 误差平方和 S_E 可能有来自暗室的贡献。

符号约定

设 $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ ， i, j, k 分别为因素 A PMT, B 暗室和重复试验的下标

	A_1	A_2	$\cdots$	A_r		B 的效应
B_1	$X_{111}, \cdots, X_{11t}$	$X_{211}, \cdots, X_{21t}$	$\cdots$	$X_{r11}, \cdots, X_{r1t}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot} - \overline{X}$
B_2	$X_{121}, \cdots, X_{12t}$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot} - \overline{X}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_s	$X_{1s1}, \cdots, X_{1st}$	$X_{2s1}, \cdots, X_{2st}$	$\cdots$	$X_{rs1}, \cdots, X_{rst}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot} - \overline{X}$
	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot}$	$\overline{X}$	
A 的效应	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{ij \cdot} - \overline{X}_{i \cdot \cdot}$	$-\overline{X}_{\cdot j \cdot} + \overline{X}$

$$\underbrace{\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}}_{AB\text{的交叉效应}} + \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X} + \overline{X}_{\cdot j\cdot} - \overline{X} = \overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}$$

因素间可能存在交叉效应，例如 PMT T0 与暗室 A 的光探头贴合存在缝隙。

- 该效应既不在 T0 水平单独呈现，也不在 A 水平单独呈现。

符号约定

设 $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$， i, j, k 分别为因素 A PMT, B 暗室和重复试验的下标

	A_1	A_2	$\cdots$	A_r		B 的效应
B_1	$X_{111}, \cdots, X_{11t}$	$X_{211}, \cdots, X_{21t}$	$\cdots$	$X_{r11}, \cdots, X_{r1t}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot} - \overline{X}$
B_2	$X_{121}, \cdots, X_{12t}$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot} - \overline{X}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_s	$X_{1s1}, \cdots, X_{1st}$	$X_{2s1}, \cdots, X_{2st}$	$\cdots$	$X_{rs1}, \cdots, X_{rst}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot} - \overline{X}$
	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot}$	$\overline{X}$	
A 的效应	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot}$	$-\overline{X}_{\cdot j \cdot} + \overline{X}$

$$\underbrace{\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}}_{AB\text{的交叉效应}} + \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X} + \overline{X}_{\cdot j\cdot} - \overline{X} = \overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}$$

因素间可能存在交叉效应，例如 PMT T0 与暗室 A 的光探头贴合存在缝隙。

- 该效应既不在 T0 水平单独呈现，也不在 A 水平单独呈现。

符号约定

设 $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$， i, j, k 分别为因素 A PMT, B 暗室和重复试验的下标

	A_1	A_2	$\cdots$	A_r		B 的效应
B_1	$X_{111}, \cdots, X_{11t}$	$X_{211}, \cdots, X_{21t}$	$\cdots$	$X_{r11}, \cdots, X_{r1t}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot} - \overline{X}$
B_2	$X_{121}, \cdots, X_{12t}$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot} - \overline{X}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_s	$X_{1s1}, \cdots, X_{1st}$	$X_{2s1}, \cdots, X_{2st}$	$\cdots$	$X_{rs1}, \cdots, X_{rst}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot} - \overline{X}$
	$\overline{X}_{1\cdot\cdot}$	$\overline{X}_{2\cdot\cdot}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r\cdot\cdot}$	$\overline{X}$	
A 的效应	$\overline{X}_{1\cdot\cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{2\cdot\cdot} - \overline{X}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r\cdot\cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot}$	$-\overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}$

$$\underbrace{\overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}}_{AB\text{的交叉效应}} + \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X} + \overline{X}_{\cdot j\cdot} - \overline{X} = \overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}$$

因素间可能存在交叉效应，例如 PMT T0 与暗室 A 的光探头贴合存在缝隙。

- 该效应既不在 T0 水平单独呈现，也不在 A 水平单独呈现。

符号约定

设 $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$， i, j, k 分别为因素 A PMT, B 暗室和重复试验的下标

	A_1	A_2	$\cdots$	A_r		B 的效应
B_1	$X_{111}, \cdots, X_{11t}$	$X_{211}, \cdots, X_{21t}$	$\cdots$	$X_{r11}, \cdots, X_{r1t}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 1 \cdot} - \overline{X}$
B_2	$X_{121}, \cdots, X_{12t}$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{221}, \cdots, X_{22t}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot 2 \cdot} - \overline{X}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_s	$X_{1s1}, \cdots, X_{1st}$	$X_{2s1}, \cdots, X_{2st}$	$\cdots$	$X_{rs1}, \cdots, X_{rst}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot}$	$\overline{X}_{\cdot s \cdot} - \overline{X}$
	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot}$	$\overline{X}$	
A 的效应	$\overline{X}_{1 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{2 \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\cdots$	$\overline{X}_{r \cdot \cdot} - \overline{X}$	$\overline{X}_{ij \cdot} - \overline{X}_{i \cdot \cdot}$	$-\overline{X}_{\cdot j \cdot} + \overline{X}$

$$\underbrace{\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j \cdot} + \overline{X}}_{AB\text{的交叉效应}} + \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X} + \overline{X}_{\cdot j \cdot} - \overline{X} = \overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}$$

因素间可能存在交叉效应，例如 PMT T0 与暗室 A 的光探头贴合存在缝隙。

- 该效应既不在 T0 水平单独呈现，也不在 A 水平单独呈现。

平方和分解

符号	各类平方和	自由度
S_T	总平方和	$rst-1$
S_E	误差平方和	$rs(t-1)$
S_A, S_B	因素 A, B 的 效应平方和	$r-1, s-1$
$S_{A\times B}$	A, B 的 交互效应平方和	$(r-1)(s-1)$

$$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}[(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\cdot})+(\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X})+(\overline{X}_{\cdot j\cdot}-\overline{X})+(\overline{X}_{ij\cdot}-\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X}_{\cdot j\cdot}+\overline{X})]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\cdot})^2+st\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X})^2+rt\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\cdot j\cdot}-\overline{X})^2+t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{ij\cdot}-\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X}_{\cdot j\cdot}+\overline{X})^2$$

$$=S_E+S_A+S_B+S_{A\times B}$$

方差分析

```r
v <- aov(PDE~PMT*暗室, data=rates)
print(summary(v))
```

	自由度	平方和	平方和/自由度	F	p-值
PMT 因素	3	0.02684	0.00895	1985.9	$< 2 \times 10^{-16}$
暗室因素	3	0.25793	0.08598	19087.4	$< 2 \times 10^{-16}$
PMT× 暗室因素	9	0.02153	0.00239	531.2	$< 2 \times 10^{-16}$
误差	96	0.00043	4.479×10^{-6}		

- 拒绝所有原假设，PMT、暗室、PMT-暗室交叉因素对信号率都有显著影响。
- 综合考虑各因素，推翻前面的结论，认为 PMT 之间的差异是显著的。

方差分析

```r
v <- aov(PDE~PMT*暗室, data=rates)
print(summary(v))
```

	自由度	平方和	平方和/自由度	F	p-值
PMT 因素	3	0.02684	0.00895	1985.9	$< 2 \times 10^{-16}$
暗室因素	3	0.25793	0.08598	19087.4	$< 2 \times 10^{-16}$
PMT× 暗室因素	9	0.02153	0.00239	531.2	$< 2 \times 10^{-16}$
误差	96	0.00043	4.479×10^{-6}		

- 拒绝所有原假设，PMT、暗室、PMT-暗室交叉因素对信号率都有显著影响。
- 综合考虑各因素，推翻前面的结论，认为 PMT 之间的差异是显著的。

PMT 问题的定量分析

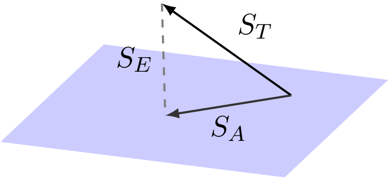
- 通过进一步分析，我们得出了国产 PMT 的检测效率是进口的 1.7 倍的结论，论证了新型国产 PMT 用于大科学装置的可行性。

Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment, NIM A, 168506, 2023

总结推广

总结

1. 方差分析 和 F-检验是鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法。
2. 偏差平方和 S_T 可分成两部分，不可控的随机因素 S_E，和研究中施加的试验指标形成影响的可控因素 S_A。 $S_T = S_E + S_A$



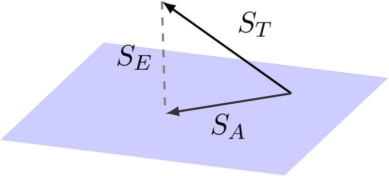
3. 通过与不可控随机因素的对比，构造 F 统计量，分析平方和的贡献大小，确定可控因素对试验指标影响力。

	自由度	平方和	平方和/自由度	F	p-值
PMT 因素	3	0.027	0.0090	3.452	0.0191
误差	108	0.280	0.0026		
总和	111	0.307			

4. 多因素间会产生交互效应。

总结

1. 方差分析 和 F-检验是鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法。
2. 偏差平方和 S_T 可分成两部分，不可控的随机因素 S_E，和研究中施加的试验指标形成影响的可控因素 S_A。 $S_T = S_E + S_A$



3. 通过与不可控随机因素的对比，构造 F 统计量，分析平方和的贡献大小，确定可控因素对试验指标影响力。

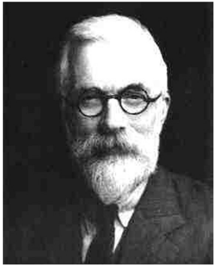
	自由度	平方和	平方和/自由度	F	p-值
PMT 因素	3	0.027	0.0090	3.452	0.0191
误差	108	0.280	0.0026		
总和	111	0.307			

4. 多因素间会产生交互效应。

历史

方差分析由著名英国统计学家 R.A.Fisher 在 1923 年提出, 为纪念 Fisher, 以 F 命名, 故方差分析又称 F 检验。Analysis of Variance，简称 AoV 或者 ANOVA。

Ronald Fisher



推广

- 认为 PMT 之间的差异是显著的，支持了国产 PMT 性能优于出口的。
- 如何测量它们具体的差异？ $\rightarrow$ 线性回归。
- 反过来，方差分析用于回归方程的线性假设检验 $\rightarrow$ 支撑线性回归。