

北京高校第十三届青年教师教学基本功比赛
课程名称：概率统计分析及量测技术

蒙特卡罗方法

授课对象	工程物理专业 大三年级本科生
课程类型	专业必修课
参赛选手	理科类 A 组 13 号



两弹一星题材《马兰花开》剧照



《马兰花开》脚本

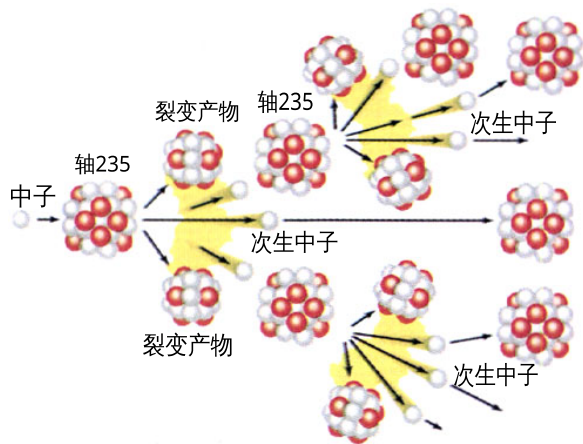
理论组：老邓，第八次计算结果与第九次完全吻合！

邓稼先：中国的第一颗原子弹，就从这里开始吧！

九次计算耗时半年，最终结果一致。
纠正了苏联专家的计算错误。

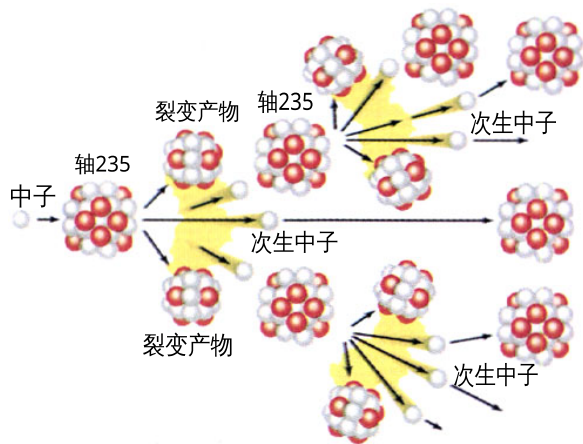
- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴随机性；
- 中子在介质里输运被随机散射损耗能量；
- 最终得到确定的“试爆成功”结果。

掌握和运用核物理，需要大量的计算。



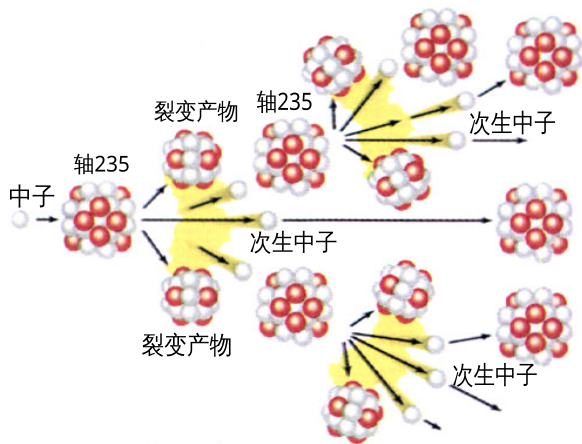
- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴**随机**性；
- 中子在介质里输运被**随机**散射损耗能量；
- 最终得到**确定**的“试爆成功”结果。

掌握和运用核物理，需要大量的
计算。



- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴**随机**性；
- 中子在介质里输运被**随机**散射损耗能量；
- 最终得到**确定**的“试爆成功”结果。

掌握和运用核物理，需要大量的**计算**。



蒙特卡罗
方法

大数
定律

舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望

大数定律

算术平均值依概率收敛于数学期望

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是独立同分布的随机变量序列，那么

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)}_{\text{算术平均值}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \underbrace{\int g(x) f_X(x) dx}_{g(X) \text{ 的数学期望}}$$

$f_X(x)$ 是 X_i 的概率密度函数， $g(x)$ 是 x 的任意函数。

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi] \\ f_X(x) = \frac{1}{\pi}, \quad \text{均匀分布} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^{\pi} g(x) f_X(x) dx = \frac{2}{\pi} = 0.64$$

生成 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数 X_i , 计算 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$

- 算术平均值依概率收敛于数学期望

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^{\pi} \sin x \underbrace{f_X(x)}_{1/\pi} dx = \frac{2}{\pi}$$

- 反向应用：能否把待求量构造成数学期望，使用算术平均近似？

$$\pi \approx \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \sin X_i}$$

定义 (蒙特卡罗方法)

使用随机数解决计算问题的方法统称为蒙特卡罗方法。

- 算术平均值依概率收敛于数学期望

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_0^{\pi} \sin x \underbrace{f_X(x)}_{1/\pi} dx = \frac{2}{\pi}$$

- 反向应用：能否把待求量构造成数学期望，使用算术平均近似？

$$\pi \approx \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \sin X_i}$$

定义 (蒙特卡罗方法)

使用随机数解决计算问题的方法统称为蒙特卡罗方法。

蒙特卡罗
方法

大数
定律

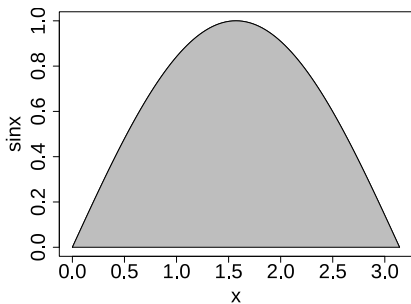
舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望

舍选法

$$\pi \approx \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \sin X_i}, X_i \in [0, \pi] \text{ 均匀}$$



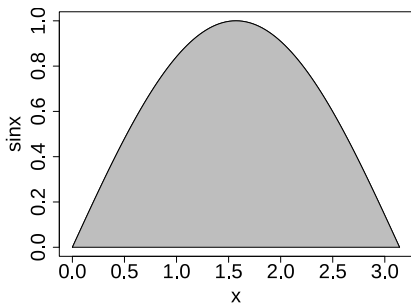
- $\int_0^{\pi} \sin x dx$ 正是 $\sin x$ 与 x 轴围成的面积
- 每次均匀生成一对随机数 (X_i, Y_i)

$$X_i \in [0, \pi], Y_i \in [0, 1]$$

- 定义函数 $h(\cdot, \cdot)$ ，如果它落在阴影中，则记 $h(X_i, Y_i) = 1$ ，否则记 $h(X_i, Y_i) = 0$ 。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i, Y_i) \approx \frac{2}{\pi}$$

$$\pi \approx \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \sin X_i}, X_i \in [0, \pi] \text{ 均匀}$$

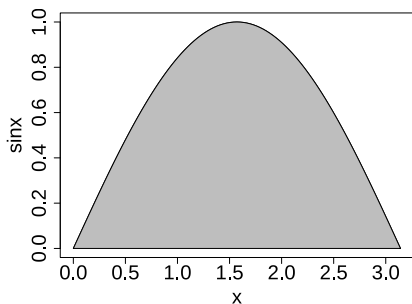


- $\int_0^{\pi} \sin x dx$ 正是 $\sin x$ 与 x 轴围成的面积
- 每次均匀生成一对随机数 (X_i, Y_i)

$$X_i \in [0, \pi], Y_i \in [0, 1]$$

- 定义函数 $h(\cdot, \cdot)$ ，如果它落在阴影中，则记 $h(X_i, Y_i) = 1$ ，否则记 $h(X_i, Y_i) = 0$ 。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i, Y_i) \approx \frac{2}{\pi}$$



- X_i 为针与平行线的夹角
- Y_i 为针的中点与最近平行线的距离
- 针长与平行线间隔相等都记为 1

$$h(X_i, Y_i) = \begin{cases} 1 & \sin X_i \leq Y_i \\ 0 & \sin X_i > Y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin X_i \leq Y_i & \Leftrightarrow \text{针与直线相交} \\ \sin X_i > Y_i & \Leftrightarrow \text{两者不相交} \end{cases}$$

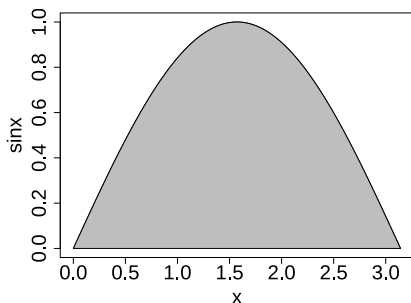
什么叫做“如果 (X_i, Y_i) 落在阴影中”？

大数
定律

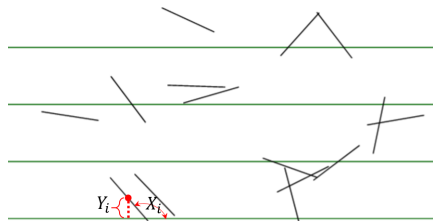
舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望



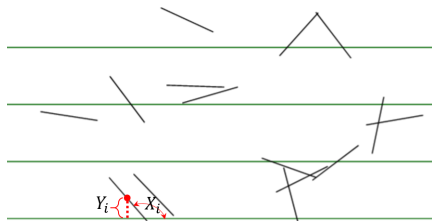
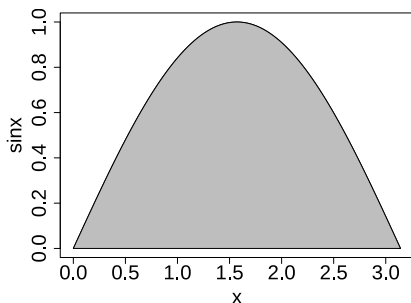
$$h(X_i, Y_i) = \begin{cases} 1 & \sin X_i \leq Y_i \\ 0 & \sin X_i > Y_i \end{cases}$$



- X_i 为针与平行线的夹角
- Y_i 为针的中点与最近平行线的距离
- 针长与平行线间隔相等都记为 1

$$\begin{cases} \sin X_i \leq Y_i & \Leftrightarrow \text{针与直线相交} \\ \sin X_i > Y_i & \Leftrightarrow \text{两者不相交} \end{cases}$$

什么叫做“如果 (X_i, Y_i) 落在阴影中”？



- X_i 为针与平行线的夹角
- Y_i 为针的中点与最近平行线的距离
- 针长与平行线间隔相等都记为 1

$$h(X_i, Y_i) = \begin{cases} 1 & \sin X_i \leq Y_i \\ 0 & \sin X_i > Y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin X_i \leq Y_i & \Leftrightarrow \text{针与直线相交} \\ \sin X_i > Y_i & \Leftrightarrow \text{两者不相交} \end{cases}$$

大数
定律

舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望

学者们争相试验，使用随机投针的方法逼近圆周率。

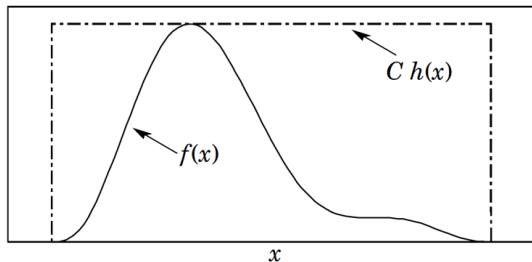
试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

小明，2023，针长 = 1，投掷次数 = 100，相交次数 = 64， $\pi \approx 3.125$

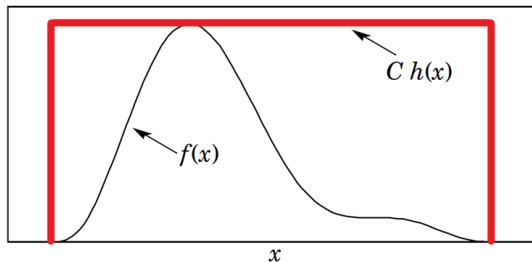
学者们争相试验，使用随机投针的方法逼近圆周率。

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

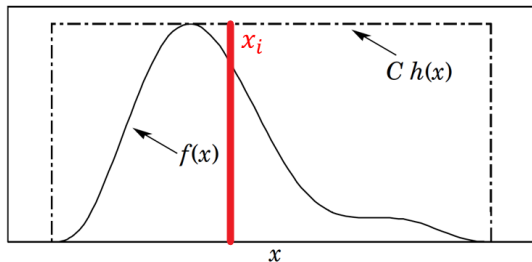
小明，2023，针长 = 1，投掷次数 = 100，相交次数 = 64， $\pi \approx 3.125$



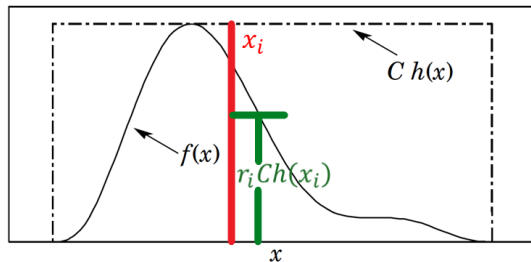
- ① 选取容易抽样的分布 $h(x)$ ，使得曲线 $Ch(x)$ 可以覆盖待抽样的分布 $f(x)$ ；
- ② 从 $h(x)$ 抽样得 x_i ；
- ③ 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽样得 r_i ；
- ④ 如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i 否则舍弃 (比大小)；
- ⑤ 保留的 x_i 序列服从 $f(x)$ 分布，可用序列的算术平均估算数学期望。



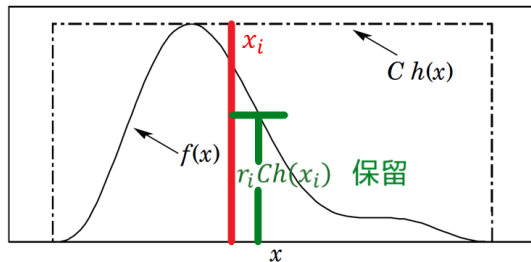
- ① 选取容易抽样的分布 $h(x)$ ，使得曲线 $Ch(x)$ 可以覆盖待抽样的分布 $f(x)$ ；
- ② 从 $h(x)$ 抽样得 x_i ；
- ③ 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽样得 r_i ；
- ④ 如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i 否则舍弃 (比大小)；
- ⑤ 保留的 x_i 序列服从 $f(x)$ 分布，可用序列的算术平均估算数学期望。



- ① 选取容易抽样的分布 $h(x)$ ，使得曲线 $Ch(x)$ 可以覆盖待抽样的分布 $f(x)$ ；
- ② 从 $h(x)$ 抽样得 x_i ；
- ③ 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽样得 r_i ；
- ④ 如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i 否则舍弃 (比大小)；
- ⑤ 保留的 x_i 序列服从 $f(x)$ 分布，可用序列的算术平均估算数学期望。



- ① 选取容易抽样的分布 $h(x)$ ，使得曲线 $Ch(x)$ 可以覆盖待抽样的分布 $f(x)$ ；
- ② 从 $h(x)$ 抽样得 x_i ；
- ③ 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽样得 r_i ；
- ④ 如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i 否则舍弃 (比大小)；
- ⑤ 保留的 x_i 序列服从 $f(x)$ 分布，可用序列的算术平均估算数学期望。

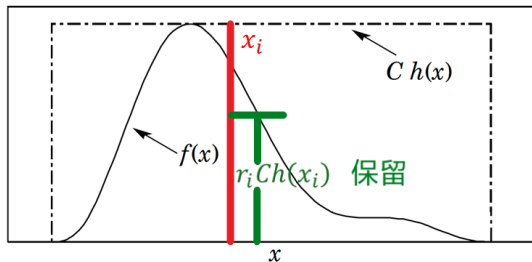


- ① 选取容易抽样的分布 $h(x)$ ，使得曲线 $Ch(x)$ 可以覆盖待抽样的分布 $f(x)$ ；
- ② 从 $h(x)$ 抽样得 x_i ；
- ③ 从 $[0, 1]$ 均匀分布抽样得 r_i ；
- ④ 如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i 否则舍弃 (比大小)；
- ⑤ 保留的 x_i 序列服从 $f(x)$ 分布，可用序列的算术平均估算数学期望。

欲证明保留下来的 x_i 服从 $f(y)$ 分布，即 $P(x_i \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ 。

舍选法的操作步骤恰是条件概率。证明如下：

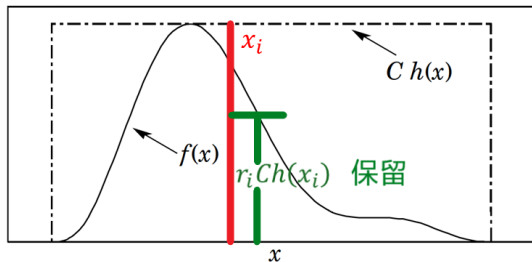
$$\begin{aligned} P(x_i \leq y) &= P[x_i \leq y | r_i C h(x_i) \leq f(x_i)] = \frac{P[x_i \leq y, r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]}{P[r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^y \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx} = \frac{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^y f(x) dx}{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^y f(x) dx \end{aligned}$$



欲证明保留下来的 x_i 服从 $f(y)$ 分布，即 $P(x_i \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ 。

舍选法的操作步骤恰是条件概率。证明如下：

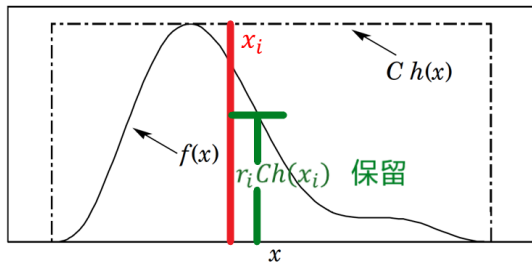
$$\begin{aligned}
 P(x_i \leq y) &= P[x_i \leq y | r_i C h(x_i) \leq f(x_i)] = \frac{P[x_i \leq y, r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]}{P[r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]} \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^y \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx} = \frac{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^y f(x) dx}{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^y f(x) dx
 \end{aligned}$$



欲证明保留下来的 x_i 服从 $f(y)$ 分布，即 $P(x_i \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ 。

舍选法的操作步骤恰是条件概率。证明如下：

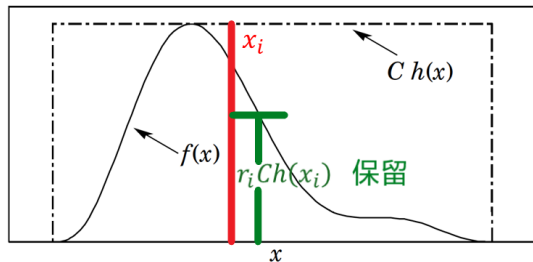
$$\begin{aligned}
 P(x_i \leq y) &= P[x_i \leq y | r_i C h(x_i) \leq f(x_i)] = \frac{P[x_i \leq y, r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]}{P[r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]} \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^y \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx} = \frac{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^y f(x) dx}{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^y f(x) dx
 \end{aligned}$$



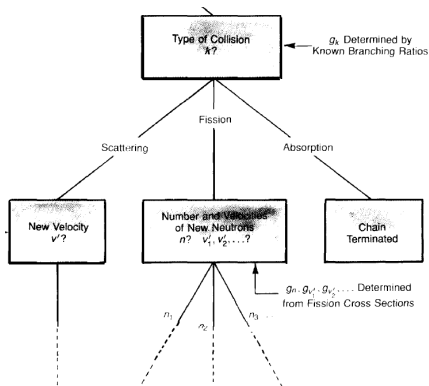
欲证明保留下来的 x_i 服从 $f(y)$ 分布, 即 $P(x_i \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ 。

舍选法的操作步骤恰是条件概率。证明如下:

$$\begin{aligned}
 P(x_i \leq y) &= P[x_i \leq y | r_i C h(x_i) \leq f(x_i)] = \frac{P[x_i \leq y, r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]}{P[r_i C h(x_i) \leq f(x_i)]} \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^y \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{f(x)/Ch(x)} dr \right] h(x) dx} = \frac{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^y f(x) dx}{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^y f(x) dx
 \end{aligned}$$



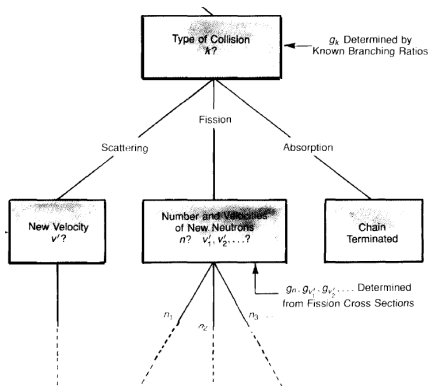
- 1940 年代由 Stan Ulam 和 von Neumann 计算中子扩散与核弹引爆机制，在最早的电子计算机上运行。
- “蒙特卡罗”是 Stan 叔叔常去的赌场区，被两位作者借用来代表“随机性”。



Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method, 1987

- 我国科学团队在当时刚研制成功的“104 电子计算机”上进行了第十次蒙特卡罗计算，确认无误。
- 在计算机上复现了苏联专家的错误原因。
- 电子计算机的出现，让蒙特卡罗方法蓬勃发展。

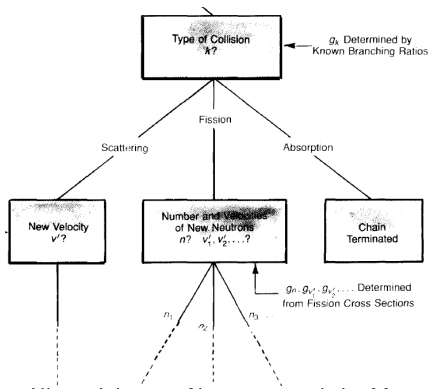
- 1940 年代由 Stan Ulam 和 von Neumann 计算中子扩散与核弹引爆机制，在最早的电子计算机上运行。
- “蒙特卡罗”是 Stan 叔叔常去的赌场区，被两位作者借用来代表“随机性”。



Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method, 1987

- 我国科学团队在当时刚研制成功的“104 电子计算机”上进行了第十次蒙特卡罗计算，确认无误。
- 在计算机上复现了苏联专家的错误原因。
- 电子计算机的出现，让蒙特卡罗方法蓬勃发展。

- 1940 年代由 Stan Ulam 和 von Neumann 计算中子扩散与核弹引爆机制，在最早的电子计算机上运行。
- “蒙特卡罗”是 Stan 叔叔常去的赌场区，被两位作者借用来代表“随机性”。



Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method, 1987

- 我国科学团队在当时刚研制成功的“104 电子计算机”上进行了第十次蒙特卡罗计算，确认无误。
- 在计算机上复现了苏联专家的错误原因。
- 电子计算机的出现，让蒙特卡罗方法蓬勃发展。

蒙特卡罗
方法

大数
定律

舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望

马尔可夫链法

舍选法的关键步骤

如果 $r_i Ch(x_i) \leq f(x_i)$ 则保留 x_i ，否则舍弃。

- 困难：在高维问题中，无法知道 $f(x)$ 的绝对数值，只知道相对值 $\tilde{f}(x)$

$$f(x_i) = \frac{\tilde{f}(x_i)}{\int \tilde{f}(x) dx}$$

分母上的积分无法有效算出。

- 把 $f(x_i)$ 与上一个采样点 $f(x_{i-1})$ 比较，决定是否保留。
- 以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \cdots$$

- 每个 x_i 都只依赖于 x_{i-1} ，不依赖于更早的历史，形成马尔可夫链。
- 规避了计算 $f(x)$ 归一化常数的困难。

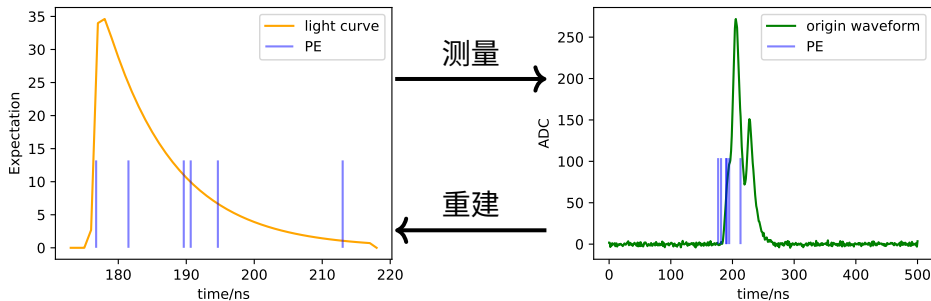
- 把 $f(x_i)$ 与上一个采样点 $f(x_{i-1})$ 比较，决定是否保留。
- 以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \cdots$$

- 每个 x_i 都只依赖于 x_{i-1} ，不依赖于更早的历史，形成马尔可夫链。
- 规避了计算 $f(x)$ 归一化常数的困难。

设光敏仪器按一定的**光强曲线** $\mu\phi(t - t_0)$ 接收**光电子** (photoelectron, PE)，各光电子时间为 $\vec{z} := (t_1, t_2, \dots, t_N)$ 。 **波形** $\vec{w}$ 是时间序列向量。

$$\mu, t_0 \rightarrow \vec{z} \rightarrow \vec{w}$$

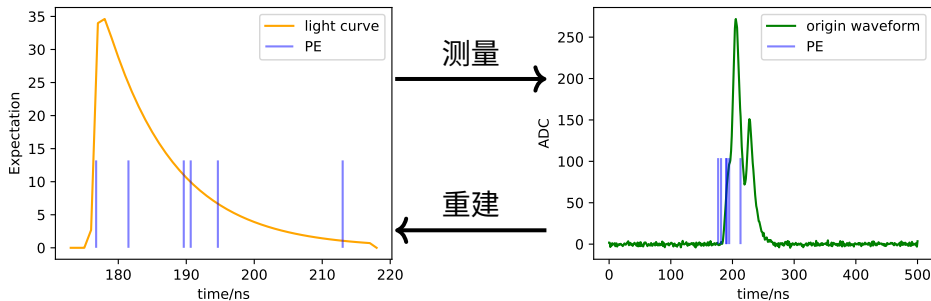


$$\mu, t_0 \xleftarrow{\text{拟合}} \vec{z} \xleftarrow{\text{分析计数}} \vec{w}$$

- 但脉冲可能有重叠，无法确切测量 $\vec{z}$ ，成为粒子物理实验领域的难题。

设光敏仪器按一定的**光强曲线** $\mu\phi(t-t_0)$ 接收**光电子** (photoelectron, PE)，各光电子时间为 $\vec{z} := (t_1, t_2, \dots, t_N)$ 。 **波形** $\vec{w}$ 是时间序列向量。

$$\mu, t_0 \rightarrow \vec{z} \rightarrow \vec{w}$$

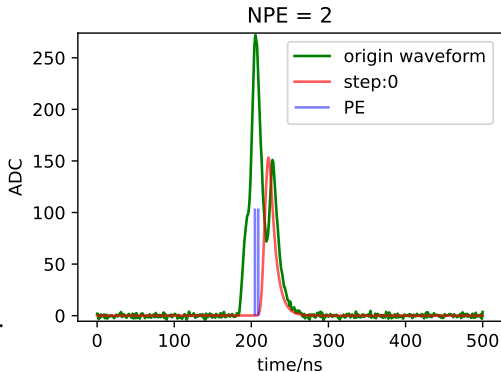


$$\mu, t_0 \xleftarrow{\text{拟合}} \vec{z} \xleftarrow{\text{分析计数}} \vec{w}$$

- 但脉冲可能有重叠，无法确切测量 $\vec{z}$ ，成为粒子物理实验领域的难题。

$$\begin{aligned}
 p(\vec{w}|t_0, \mu) &= \underbrace{p(\vec{w}|\emptyset)p(\emptyset|t_0, \mu)}_{\text{空白解0重积分}} \\
 &+ \underbrace{\int_{\vec{z} \in T} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{1重积分}} \\
 &+ \underbrace{\iint_{\vec{z} \in T^2} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{2重积分}} \\
 &+ \underbrace{\iiint_{\vec{z} \in T^3} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{3重积分}} \dots
 \end{aligned}$$

NPE 代表 $\vec{z}$ 的元素个数，它不确定。



- 使用马尔可夫链，令 $\vec{z}$ 游历各重积分，问题得到完满解决。

$$\begin{aligned}
 p(\vec{w}|t_0, \mu) &= \underbrace{p(\vec{w}|\emptyset)p(\emptyset|t_0, \mu)}_{\text{空白解0重积分}} \\
 &+ \underbrace{\int_{\vec{z} \in T} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{1重积分}} \\
 &+ \underbrace{\iint_{\vec{z} \in T^2} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{2重积分}} \\
 &+ \underbrace{\iiint_{\vec{z} \in T^3} p(\vec{w}|\vec{z})p(\vec{z}|t_0, \mu)d\vec{z}}_{\text{3重积分}} \cdots .
 \end{aligned}$$

NPE 代表 $\vec{z}$ 的元素个数，它不确定。

- 使用马尔可夫链，令 $\vec{z}$ 游历各重积分，问题得到完满解决。

蒙特卡罗
方法

大数
定律

舍选法

马尔可
夫链法

总结
展望

总结展望

- ① 蒙特卡罗方法是使用随机数解决计算问题的方法。大数定律提供基本原理。
- ② 舍选法可完成任意形状分布 $f(x)$ 的抽样。

- ③ 马尔可夫链法以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

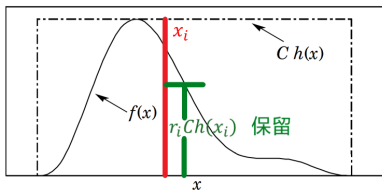
$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \cdots$$

克服舍选法的归一常数困难。

蒙特卡罗方法的特征

连接了随机与确定，将所需运算化繁为简，有效利用计算机求解。

- ① 蒙特卡罗方法是使用随机数解决计算问题的方法。大数定律提供基本原理。
- ② 舍选法可完成任意形状分布 $f(x)$ 的抽样。



- ③ 马尔可夫链法以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

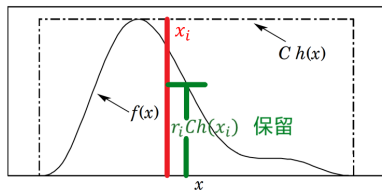
$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \dots$$

克服舍选法的归一常数困难。

蒙特卡罗方法的特征

连接了随机与确定，将所需运算化繁为简，有效利用计算机求解。

- ① 蒙特卡罗方法是使用**随机数**解决计算问题的方法。大数定律提供基本原理。
- ② 舍选法可完成任意形状分布 $f(x)$ 的抽样。



- ③ 马尔可夫链法以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

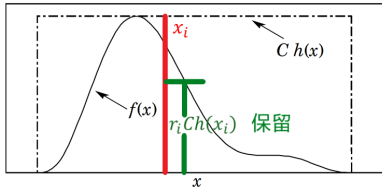
$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \dots$$

克服舍选法的归一常数困难。

蒙特卡罗方法的特征

连接了**随机**与**确定**，将所需运算化繁为简，有效利用计算机求解。

- ① 蒙特卡罗方法是使用**随机数**解决计算问题的方法。大数定律提供基本原理。
- ② 舍选法可完成任意形状分布 $f(x)$ 的抽样。



- ③ 马尔可夫链法以概率 $\min \left[1, \frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} \right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$

$$x_1 \xrightarrow{\text{接受}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{拒绝}} x_2 \xrightarrow{\text{接受}} x_3 \rightarrow \dots$$

克服舍选法的归一常数困难。

蒙特卡罗方法的特征

连接了**随机**与**确定**，将所需运算化繁为简，有效利用计算机求解。

- ↓ 已知的信息越来越少，适用范围越来越广。

	方法	已知的分布信息	维度
下周	逆函数法	完全已知	低
✓	舍选法	与标准分布的比值	低
✓	马尔可夫链法	与自身的比值	高
下周	对抗生成网络法*	无解析形式，无法计算比值	高

为什么蒙特卡罗方法有效？——

- 姚（期智）准则：给算法合理加入随机因素，会有效提升效率。
- 蒙特卡罗方法为物理学中 **确定性的困难问题** 提供了 **仅有的可操作** 解法。

作业

有长度为 $L = 5 \text{ cm}$ 的细长 α 均匀放射源，左端位于原点，棒体与 z 轴平行，发射的 α 粒子各向同性。在 z 轴正向距离原点 $D = 14 \text{ cm}$ 处放置了一个圆盘状探测器记录 α 粒子，半径 $R = 7 \text{ cm}$ ，轴线与 z 轴重合。求探测器的几何接受效率。

- ↓ 已知的信息越来越少，适用范围越来越广。

	方法	已知的分布信息	维度
下周	逆函数法	完全已知	低
✓	舍选法	与标准分布的比值	低
✓	马尔可夫链法	与自身的比值	高
下周	对抗生成网络法*	无解析形式，无法计算比值	高

为什么蒙特卡罗方法有效？

- 姚（期智）准则：给算法合理加入随机因素，会有效提升效率。
- 蒙特卡罗方法为物理学中 **确定性的困难问题** 提供了 **仅有的可操作** 解法。

作业

有长度为 $L = 5 \text{ cm}$ 的细长 α 均匀放射源，左端位于原点，棒体与 z 轴平行，发射的 α 粒子各向同性。在 z 轴正向距离原点 $D = 14 \text{ cm}$ 处放置了一个圆盘状探测器记录 α 粒子，半径 $R = 7 \text{ cm}$ ，轴线与 z 轴重合。求探测器的几何接受效率。