测量不确定度

续本达

清华大学 工程物理系

2022-12-26

复习

时间序列

1. 时间序列是离散平稳过程的特列
2. 与滤波理论联系紧密

白噪声

如果时间序列 $\{\epsilon_t\}$ 满足

1. $\mathrm{E}(\epsilon_t) = 0$
2. $\mathrm{E}(\epsilon_s \epsilon_t) = \sigma^2 \delta_{st}$ 即 $\gamma_k = \delta_k \sigma^2$ 只有 $\gamma_0 = \sigma^2$

称之为 白噪声序列 。一般还可以再假设 $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ 为 高斯白噪声序列

AR(p) 过程

平稳过程 $\{X_t\}$ 被叫作 p 阶自回归 (autoregression) 过程，简记为 AR(p) 过程，如果

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \epsilon_t$$

是白噪声。ϵ_t 作是 AR 过程的 创新 (innovation) 。

- 记延迟算子 B 为 $BX_t = X_{t-1}$ 那么 AR(p) 过程的条件可记为

$$\Phi(B) X_t = \epsilon_t$$

$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p$ 称为 AR(p) 过程的 生成多项式

- 只有 X_t 与 ϵ_t 相关

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_t, X_s) = \begin{cases} 0 & t > s \\ \sigma^2 & t = s \\ < \sigma^2 & t < s \end{cases}$$

在高斯过程中，创新也是高斯的。取名 “innovation” 代表给随机过程带来新的熵。

MA(q) 过程

随机过程

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} = \Theta(B)\epsilon_t$$

叫做是有具有创新 $\{\epsilon_t\}$ 和生成多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$$

的滑动平均（moving-average）过程 MA(q)。
随机过程 $\{X_t\}$ 是白噪声的“滑动加权平均”，归一到常数项为 1。

测量不确定度

标准

" 测量不确定度" 广义上指的是测量结果的不确定性。

测量不确定度（简称不确定度）的工程定义（测量领域）

1. 根据所用到的信息，表征赋予被测量值分散性的非负参数，
   - International Vocabulary for Metrology
   - ISO/IEC Guide 99:2007 （VIM2008）
2. 表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。
   - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (known as the GUM)
   - ISO/IEC Guide 98-3:2008 （GUM95）

概率论指导量测标准的制定

Since metrology is in an evolving state moving from a classical to a fully probabilistic approach, it is especially important to have an international vocabulary that can allow metrologists to clearly communicate about the measurement approach that they are using. – VIM

测量的术语

VIM 2.16 测量误差（Measurement Error）

- Error of Measurement， 误差 （Error）

测量值减去参考量值。

1. 测量误差的概念在以下两种情况下均可使用：
   - 当涉及存在单个参考量值，如用测得值的测量不确定度可忽略的测量标准进行校准，或约定值给定时，测量误差是已知的；
   - 假设被测量使用唯一的真值或范围可忽略的一组真值表征时，测量误差是未知的。
2. 测量误差不应与出现的错误或过失相混淆。

VIM 2.26 测量不确定度（Measurement Uncertainty）

- Uncertainty of Measurement，简称 不确定度 （Uncertainty）

根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数。

1. 测量不确定度包括由系统影响引起的分量，如与修正量和测量标准所赋量值有关的分量及定义的不确定度。有时对估计的系统影响未修正，而是当作不确定分量处理。
2. 此参数可以是诸如称为 标准不确定度 的标准偏差（或其特定倍数），或是说明了包含概率的区间半宽度。
3. 不确定度一般由若干分量组成。其中一些分量可根据一系列测量值的统计分布，按 测量不确定度的 A 类评定 进行评定，并可用标准差表征。而另一些分量则可根据基于经验或其他信息所获得的概率密度函数，按测量 不确定度的 B 类评定 进行评定，也用 标准差 表征。
4. 通常，对于一组给定的信息，测量不确定度是相应于所赋予被测量的值的。该值的改变将导致相应的不确定度的改变。
5. 本定义是按 2008 版 VIM 给出的。而在 GUM 中的定义是：表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

VIM 2.26 测量不确定度（Measurement Uncertainty）

- Uncertainty of Measurement，简称 不确定度 （Uncertainty）

根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数。

1. 测量不确定度包括由系统影响引起的分量，如与修正量和测量标准所赋量值有关的分量及定义的不确定度。有时对估计的系统影响未修正，而是当作不确定分量处理。
2. 此参数可以是诸如称为 标准不确定度 的标准偏差（或其特定倍数），或是说明了包含概率的区间半宽度。
3. 不确定度一般由若干分量组成。其中一些分量可根据一系列测量值的统计分布，按 测量不确定度的 A 类评定 进行评定，并可用标准差表征。而另一些分量则可根据基于经验或其他信息所获得的概率密度函数，按测量 不确定度的 B 类评定 进行评定，也用 标准差 表征。
4. 通常，对于一组给定的信息，测量不确定度是相应于所赋予被测量的值的。该值的改变将导致相应的不确定度的改变。
5. 本定义是按 2008 版 VIM 给出的。而在 GUM 中的定义是：表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

VIM 2.26 测量不确定度（Measurement Uncertainty）

- Uncertainty of Measurement，简称 不确定度 （Uncertainty）

根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数。

1. 测量不确定度包括由系统影响引起的分量，如与修正量和测量标准所赋量值有关的分量及定义的不确定度。有时对估计的系统影响未修正，而是当作不确定分量处理。
2. 此参数可以是诸如称为 标准不确定度 的标准偏差（或其特定倍数），或是说明了包含概率的区间半宽度。
3. 不确定度一般由若干分量组成。其中一些分量可根据一系列测量值的统计分布，按 测量不确定度的 A 类评定 进行评定，并可用标准差表征。而另一些分量则可根据基于经验或其他信息所获得的概率密度函数，按测量 不确定度的 B 类评定 进行评定，也用 标准差 表征。
4. 通常，对于一组给定的信息，测量不确定度是相应于所赋予被测量的值的。该值的改变将导致相应的不确定度的改变。
5. 本定义是按 2008 版 VIM 给出的。而在 GUM 中的定义是：表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

VIM 2.26 测量不确定度（Measurement Uncertainty）

- Uncertainty of Measurement，简称 不确定度 （Uncertainty）

根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数。

1. 测量不确定度包括由系统影响引起的分量，如与修正量和测量标准所赋量值有关的分量及定义的不确定度。有时对估计的系统影响未修正，而是当作不确定分量处理。
2. 此参数可以是诸如称为 标准不确定度 的标准偏差（或其特定倍数），或是说明了包含概率的区间半宽度。
3. 不确定度一般由若干分量组成。其中一些分量可根据一系列测量值的统计分布，按 测量不确定度的 A 类评定 进行评定，并可用标准差表征。而另一些分量则可根据基于经验或其他信息所获得的概率密度函数，按测量 不确定度的 B 类评定 进行评定，也用 标准差 表征。
4. 通常，对于一组给定的信息，测量不确定度是相应于所赋予被测量的值的。该值的改变将导致相应的不确定度的改变。
5. 本定义是按 2008 版 VIM 给出的。而在 GUM 中的定义是：表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

VIM 2.26 测量不确定度（Measurement Uncertainty）

- Uncertainty of Measurement，简称 不确定度 （Uncertainty）

根据所用到的信息，表征赋予被测量量值分散性的非负参数。

1. 测量不确定度包括由系统影响引起的分量，如与修正量和测量标准所赋量值有关的分量及定义的不确定度。有时对估计的系统影响未修正，而是当作不确定分量处理。
2. 此参数可以是诸如称为 标准不确定度 的标准偏差（或其特定倍数），或是说明了包含概率的区间半宽度。
3. 不确定度一般由若干分量组成。其中一些分量可根据一系列测量值的统计分布，按 测量不确定度的 A 类评定 进行评定，并可用标准差表征。而另一些分量则可根据基于经验或其他信息所获得的概率密度函数，按测量 不确定度的 B 类评定 进行评定，也用 标准差 表征。
4. 通常，对于一组给定的信息，测量不确定度是相应于所赋予被测量的值的。该值的改变将导致相应的不确定度的改变。
5. 本定义是按 2008 版 VIM 给出的。而在 GUM 中的定义是：表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

VIM 2.17 系统测量误差（Systematic Measurement Error）

- Systematic Error of Measurement，简称 系统误差 （Systematic Error）

在重复测量中保持不变或按可预见方式变化的测量误差的分量。

注

1. 系统测量误差的参考量值是真值，或是测量不确定度可忽略不计的测量标准的测得值，或是约定量值。
2. 系统测量误差及其来源可以是已知的或未知的。对于已知的系统测量误差可采用修正补偿。
3. 系统测量误差等于测量误差减随机测量误差。

VIM 2.19 随机测量误差（Random Measurement Error）

- Random Error of Measurement，简称 随机误差 （Random Error）

在重复测量中按不可预见方式变化的测量误差的分量。

注

1. 随机误差的参考量值是对同一被测量由无穷多次重复测量得到的平均值。
2. 一组重复测量的随机测量误差形成一种分布，该分布可用期望和方差描述，其期望通常可假设为零。
3. 随机误差等于测量误差减系统测量误差。

VIM 2.28 测量不确定度的 A 类评定

Type A Evaluation of Measurement Uncertainty，简称 A 类评定 （Type A Evaluation ）
对在规定测量条件下测得的量值用统计分析的方法进行测量不确定度分量的评定。

注

规定测量条件是指重复性测量条件、期间精密度测量条件或复现性测量条件。

VIM 2.29 测量不确定度的 B 类评定

Type B Evaluation of Measurement Uncertainty，简称 B 类评定 （Type B Evaluation）
用不同于测量不确定度 A 类评定的方法对测量不确定度分量的评定。

例：评定基于如下信息

- 权威机构发布的量值
- 有证标准物质的量值
- 校准证书
- 仪器的漂移
- 经检定的测量仪器的准确度等级
- 根据人员经验推断的极限值

VIM 2.31 合成标准不确定度（Combined Standard Uncertainty）

全称 合成标准测量不确定度 （Combined Standard Measurement Uncertainty）
由在一个测量模型中各输入量的标准测量不确定度获得输出量的标准测量不确定度。

- 在数学模型中输入量相关的情况下，当计算合成标准不确定度时必须考虑协方差。

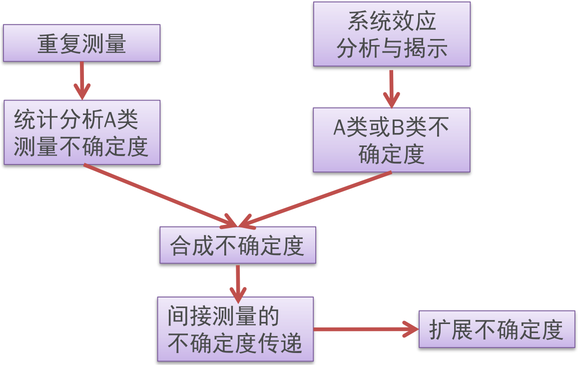
例

一个被测量 y 可能是通过对一些输入变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的测量而间接得到的。如果被测量 y 和输入变量之间满足关系式 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 y 的标准不确定度 $u(y)$ 可以由输入变量的标准不确定度 $u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_n)$，通过下式计算得到：

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

要求 x_i 之间互不相关。输入变量的标准不确定度可以是 A 类，也可以是 B 类。

不确定度的概念图


重复测量
统计分析A类测量不确定度
系统效应分析与揭示
A类或B类不确定度
合成不确定度
间接测量的不确定度传递
扩展不确定度

不确定度的传递

基本问题

1. 计算合成不确定度
   - 误差的合成问题： $e_C = e_A + e_B$
   - 不确定度的合成问题：已知不确定度 u_A, u_B（相互独立） 求 u_C

$$u_C^2 = u_A^2 + u_B^2$$

2. 计算间接测量的不确定度传递

$$Y = f(X), X = x_1, x_2, \cdots, x_n$$

   已知的直接观测量 X 的分布（或均方差），求测量结果 Y 的分布（或均方差）

3. 求统计量的不确定度（如样本标准差）

基本方法

1. 理论分析与近似公式
2. MC 方法

线性情形

1. 线性且 x 相互独立情形的不确定度计算
   - $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_N x_N$
   - $u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 u^2(x_i)$
2. 线性，x 不相互独立情形
   - $u^2(y) = \sum_{i,j} a_i a_j \operatorname{Cov}(x_i, x_j)$
   - a_i 叫做 灵敏度系数
3. 矩阵形式
   - $y = A_0 + Ax$，x, y 是向量，A 是系数矩阵。
   - $V(y) = AV(x)A^\top$， $V(y), V(x)$ 是 y, x 的协方差矩阵。

非线性情形

- 任意 $y = y(x)$，进行一阶泰勒展开化成线性

$$y(x) = y[\mathrm{E}(x)] + \sum_i \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{x=\mathrm{E}(x)} [x_i - \mathrm{E}(x_i)]$$

例 (误差传递)

- $y = f(x)$，x 为单一变量

$$u(y) \approx |f'[\mathrm{E}(x)]| u(x)$$

- $y = x_1 + x_2$

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2\,\mathrm{Cov}(x_1, x_2)$$

  - 不相关时 $u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2)$
  - 例如 A 类与 B 类不确定度合成 $u_C^2 = u_A^2 + u_B^2$

蒙特卡罗法

- $y = f(x)$
  1. 通过取随机数模拟 x 的样本；
  2. 计算 y，重复 N 次
  3. 统计 y 的分布和不确定度

具有相关性的输入变量

如果被测量 y 和输入变量之间满足关系式 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 y 的标准不确定度 $u(y)$ 可以由输入变量的标准不确定度 $u(x_i)$ ，通过下式计算得到：

$$u^2(y) = \sum_{i,j} \rho(x_i, x_j) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) = \sum_{i,j} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \mathrm{Cov}(x_i, x_j)$$

其中 $\rho(x_i, x_j)$ 为 (x_i, x_j) 之间的相关系数，$\mathrm{Cov}(x_i, x_j)$ 为协方差。

例：输入变量的相关性可导致被测量的不确定度增加

计算一组通过 n 次重复测量获得的具有完全正相关性的输入变量的平均值：

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

式中对每个 x_i 求导都有 $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$，相关系数 $\rho(x_i, x_j) = +1$，以及 $u(x_i) = u(x)$。不确定度为：

$$u^2(y) = \frac{1}{n^2}[nu^2(x) + (+1)n(n-1)u^2(x)] = u^2(x)$$

在完全相关情况下，平均值的不确定度没有按照 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的规律降低！

输入变量的相关性可导致被测量的不确定度减小

假设有两个输入变量 x_1 和 x_2，两者高度正相关，可以用 $\rho(x_1, x_2) = +1$ 来表示。如果让被测量 y 等于两个输入变量的差值，即：

$$y = x_1 - x_2$$

因为 $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1$，

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)u(x_2)$$

故有

$$u(y) = |u(x_1) - u(x_2)|$$

如果对 x_1 和 x_2 的进行测量时使用相同的仪器，则 $u(x_1)$ 和 $u(x_2)$ 将会近似相等，从而得到 $u(y) \approx 0$！

扩展不确定度

样本均值 $\overline{x}$ 的置信区间

$$\overline{x} = \mu \pm t_{X\%,\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

其中 $t_{X\%,\nu}$ 表示自由度为 ν，置信度为 $X\%$ 的乘数因子。如果 ν 很大，并且 $X = 95$，则 $t_{X\%,\nu} = 1.96$。

置信因子 k 和扩展不确定度

- $t_{X\%,\nu}$ 又叫做置信因子，记作 k。
- 把一个估计值的标准差乘以 k 便得到这个估计值在特定置信度下（一般 $X = 95$）的 扩展不确定度 。
- 为了和标准不确定度 u 区分，扩展不确定度用大写字母来表示 U 来表示，即 $U = ku$
- 习惯上在扩展不确定度前加一个 $\pm$ 标志。比如，在一个对长度进行高精度测量的例子中，U 可能表示为 $U = \pm 10\ \mu$m。与此不同，标准不确定度没有标志，所以同样的长度测量值，标准不确定度 u 表示为 $u = 5\ \mu$m。

不确定度的不确定度

方差抽样分布

样本方差 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 更一般化的定义 $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2$ 其中 ν 为自由度，ϵ_i 为残差。

回顾 $\chi^2(\nu)$ 分布的性质

1. $\mathrm{E}[\chi^2(\nu)]=\nu, \mathrm{Var}[\chi^2(\nu)]=2\nu$
2. 若 $X_1\sim\chi^2(\nu_1), X_2\sim\chi^2(\nu_2)$ X_1, X_2 相互独立，则 $X_1+X_2\sim\chi^2(\nu_1+\nu_2)$

不确定度的不确定度

- s^2 常用作不确定度的 A 类估计，它自身的不确定度由 χ^2 分布估计

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\nu) \implies u^2\left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\right)=2\nu$$

$$\implies \frac{\nu^2}{\sigma^4}u^2(s^2)=2\nu \implies u^2(s^2)=\frac{2\sigma^4}{\nu}$$

不确定度的不确定度估计

如果 s 表示测量值的标准不确定度，那么 s 自身的不确定度 $u(s)$ 为

$$u^2(s) = \left(\left. \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} \right|_{x=s^2} \right)^2 u^2(s^2) = \frac{1}{(2s)^2} \frac{2\sigma^4}{\nu}$$
$$\approx \frac{s^2}{2\nu} \implies u(s) = \frac{s}{\sqrt{2\nu}}$$

其中 ν 是自由度，它等于测量值的个数 n 减去用这些测量值所决定的特征量的个数。s 的相对不确定度表示为

$$\frac{u(s)}{s} \times 100\,\% \sim \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \times 100\,\%$$

如果 ν 小于 4，那么 s 的相对不确定度高达 35 %；而如果 ν 大于 50，那么 s 的相对不确定度会降到 10 % 以下。

韦尔奇-萨特思伟特公式（Welch-Satterthwaite Equation）

设两个互不相关的输入变量 x_1, x_2，且输出变量 $y = f(x_1, x_2)$，则有。

$$u^2(y) = c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2)$$

y 对应的不确定度的不确定度为

$$u^2[u^2(y)] = c_1^4 u^2[u^2(x_1)] + c_2^4 u^2[u^2(x_2)]$$

由 χ^2 分布，利用“不确定度的不确定度”和自由度 ν 的关系式 $u^2(s^2) = \dfrac{2\sigma^4}{\nu}$，

$$\frac{2u^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = u^2[u^2(y)] = \frac{2c_1^4 u^4(x_1)}{\nu_1} + \frac{2c_2^4 u^4(x_2)}{\nu_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{[c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2)]^2}{\nu_{\text{eff}}} = \frac{c_1^4 u^4(x_1)}{\nu_1} + \frac{c_2^4 u^4(x_2)}{\nu_2}$$

ν_{eff} 为 y 的等效自由度，不必为整数。