复习
维纳过程
平稳随机过程
白噪声
相关函数
遍历性与估计
总结

维纳与平稳过程

续本达

清华大学 工程物理系

2024-12-23

复习

马尔可夫过程及其概率分布

- 由时刻 t_0 系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态，而无需借助于 t_0 之前系统或过程所处状态的历史资料。
- 过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关。

定义

在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

马尔可夫过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 其状态空间为 I. $\forall n \geq 3 \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$，有

$$\begin{aligned} &P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\ =&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \end{aligned}$$

则称该过程为 马尔可夫过程 。

马尔可夫过程的分类

时间和状态都离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链，记为：

$$\{X_n = X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

参数集为 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，链的状态空间为：$I = \{i_0, i_1, \cdots\}$.

	离散状态	连续状态
离散时间	马尔可夫链	连续状态马尔可夫过程
连续时间	例如泊松过程	例如维纳过程

独立增量过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，若 $\forall t_1 < \cdots < t_n (n \geq 2, t_i \in T)$ 诸增量

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个 独立增量过程 。

泊松过程 增量为泊松分布，事件发生的点间隔为指数分布

维纳过程

定义

维纳过程

随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 称为是维纳过程 (或布朗运动)，若满足：

1. $W(0) = 0$
2. $W(t)$ 是独立增量和齐次增量过程；
3. $\forall t > s > 0, W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

若 $\sigma = 1$，则称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为 标准维纳过程 。

- 对于任意维纳过程 $\{W(t)\}$，可以令 $B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$ 转化成标准维纳过程。

定义

维纳过程

随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 称为是维纳过程 (或布朗运动)，若满足：

1. $W(0) = 0$
2. $W(t)$ 是独立增量和齐次增量过程；
3. $\forall t > s > 0, W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

若 $\sigma = 1$，则称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为 标准维纳过程 。

- 对于任意维纳过程 $\{W(t)\}$，可以令 $B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$ 转化成标准维纳过程。

定义

维纳过程

随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 称为是维纳过程 (或布朗运动)，若满足：

1. $W(0) = 0$
2. $W(t)$ 是独立增量和齐次增量过程；
3. $\forall t > s > 0, W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

若 $\sigma = 1$，则称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为 标准维纳过程 。

- 对于任意维纳过程 $\{W(t)\}$，可以令 $B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$ 转化成标准维纳过程。

定义

维纳过程

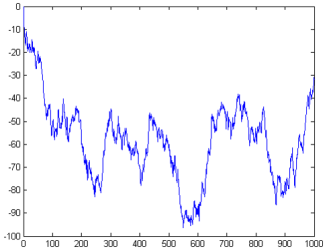
随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 称为是维纳过程 (或布朗运动)，若满足：

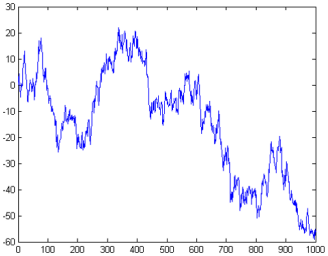
1. $W(0) = 0$
2. $W(t)$ 是独立增量和齐次增量过程；
3. $\forall t > s > 0, W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

若 $\sigma = 1$，则称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为 标准维纳过程 。

- 对于任意维纳过程 $\{W(t)\}$，可以令 $B(t) = \frac{W(t)}{\sigma}$ 转化成标准维纳过程。

Wiener 的轨迹

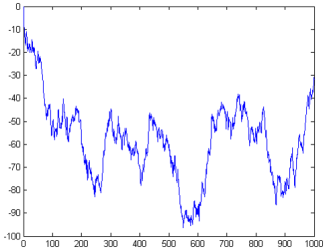


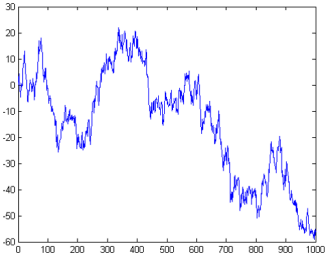


性质

1. 若 $W(t)$ 是维纳过程，其一维分布为正态分布。
2. $\mu_W(t) = \mathrm{E}[W(t)] = 0$
3. $\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$
4. $C_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

Wiener 的轨迹

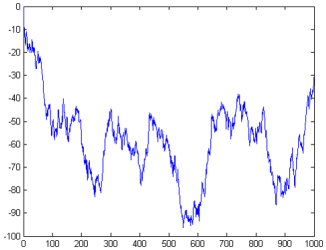


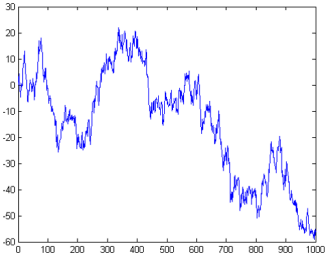


性质

1. 若 $W(t)$ 是维纳过程，其一维分布为正态分布。
2. $\mu_W(t) = \mathrm{E}[W(t)] = 0$
3. $\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$
4. $C_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

Wiener 的轨迹

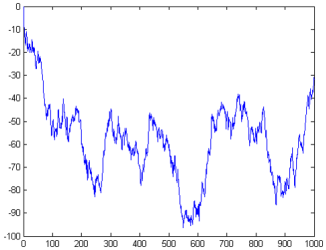


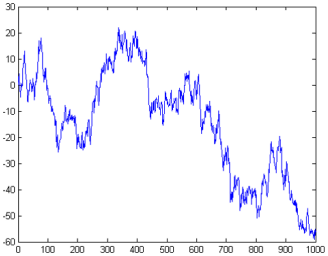


性质

1. 若 $W(t)$ 是维纳过程，其一维分布为正态分布。
2. $\mu_W(t) = \mathrm{E}[W(t)] = 0$
3. $\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$
4. $C_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

Wiener 的轨迹





性质

1. 若 $W(t)$ 是维纳过程，其一维分布为正态分布。
2. $\mu_W(t) = \mathrm{E}[W(t)] = 0$
3. $\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$
4. $C_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

维纳过程的联合分布

对 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，为了得到 $W(1), W(2), \cdots W(n)$ 的联合概率密度，考虑：

1. 独立增量
2. 增量$W(t_k) - W(t_{k-1})$服从$N(0, t_k - t_{k-1})$

$$W(t_1) = w_1,$$
$$W(t_2) = w_2$$
$$\cdots$$
$$W(t_n) = w_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} W(t_1) &= w_1, \\ W(t_2) - W(t_1) &= w_2 - w_1 \\ &\cdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) &= w_n - w_{n-1} \end{aligned}}$$

因此，我们得到 $W(1), W(2), \cdots W(n)$的联合概率密度为

$$f_W(w_1, w_2, \cdots, w_n; t_1, t_2, \cdots t_n) = f_W(w_1; t_1) F_W(w_2 - w_1; t_2 - t_1) \cdots F_W(w_n - w_{n-1}; t_n - t_{n-1})$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{w_1^2}{t_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{(w_n - w_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]\right\}}{\sqrt{2\pi t_1 (t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})}}$$

例：均值函数和相关函数

例

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，求 $X(t) = W(t+1) - W(t)$ 的均值函数和相关函数。

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[W(t+1)] - \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathrm{E}[W(s+1) - W(s)][W(s+1) - W(s)] \\
&= \mathrm{E}[W(s+1)W(t+1)] - \mathrm{E}[W(s)W(t+1)] \\
&\quad - \mathrm{E}[W(s+1)W(t)] + \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
&= \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t+1))] - \mathrm{Var}[W(\min(s, t+1))] \\
&\quad - \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t))] + \mathrm{Var}[W(\min(s, t))]
\end{aligned}$$

若 $|t-s| > 1$，$R(s,t) = 0$；若 $|t-s| \leq 1$，$R(s,t) = \sigma^2(1 - |t-s|)$。

例：均值函数和相关函数

例

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，求 $X(t) = W(t+1) - W(t)$ 的均值函数和相关函数。

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[W(t+1)] - \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathrm{E}[W(s+1) - W(s)][W(s+1) - W(s)] \\
&= \mathrm{E}[W(s+1)W(t+1)] - \mathrm{E}[W(s)W(t+1)] \\
&\quad - \mathrm{E}[W(s+1)W(t)] + \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
&= \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t+1))] - \mathrm{Var}[W(\min(s, t+1))] \\
&\quad - \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t))] + \mathrm{Var}[W(\min(s, t))]
\end{aligned}$$

若 $|t-s| > 1$，$R(s,t) = 0$；若 $|t-s| \leq 1$，$R(s,t) = \sigma^2(1 - |t-s|)$。

例：均值函数和相关函数

例

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，求 $X(t) = W(t+1) - W(t)$ 的均值函数和相关函数。

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[W(t+1)] - \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned} R(s,t) &= \mathrm{E}[W(s+1) - W(s)][W(s+1) - W(s)] \\ &= \mathrm{E}[W(s+1)W(t+1)] - \mathrm{E}[W(s)W(t+1)] \\ &\quad - \mathrm{E}[W(s+1)W(t)] + \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\ &= \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t+1))] - \mathrm{Var}[W(\min(s, t+1))] \\ &\quad - \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t))] + \mathrm{Var}[W(\min(s, t))] \end{aligned}$$

若 $|t-s| > 1$，$R(s,t) = 0$；若 $|t-s| \leq 1$，$R(s,t) = \sigma^2(1 - |t-s|)$。

例：均值函数和相关函数

例

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，求 $X(t) = W(t+1) - W(t)$ 的均值函数和相关函数。

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[W(t+1)] - \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathrm{E}[W(s+1) - W(s)][W(s+1) - W(s)] \\
&= \mathrm{E}[W(s+1)W(t+1)] - \mathrm{E}[W(s)W(t+1)] \\
&\quad - \mathrm{E}[W(s+1)W(t)] + \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
&= \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t+1))] - \mathrm{Var}[W(\min(s, t+1))] \\
&\quad - \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t))] + \mathrm{Var}[W(\min(s, t))]
\end{aligned}$$

若 $|t-s| > 1$，$R(s,t) = 0$；若 $|t-s| \leq 1$，$R(s,t) = \sigma^2(1 - |t-s|)$。

例：均值函数和相关函数

例

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，求 $X(t) = W(t+1) - W(t)$ 的均值函数和相关函数。

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[W(t+1)] - \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\begin{aligned}
R(s,t) &= \mathrm{E}[W(s+1) - W(s)][W(s+1) - W(s)] \\
&= \mathrm{E}[W(s+1)W(t+1)] - \mathrm{E}[W(s)W(t+1)] \\
&\quad - \mathrm{E}[W(s+1)W(t)] + \mathrm{E}[W(s)W(t)] \\
&= \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t+1))] - \mathrm{Var}[W(\min(s, t+1))] \\
&\quad - \mathrm{Var}[W(\min(s+1, t))] + \mathrm{Var}[W(\min(s, t))]
\end{aligned}$$

若 $|t-s| > 1$，$R(s,t) = 0$；若 $|t-s| \leq 1$，$R(s,t) = \sigma^2(1 - |t-s|)$。

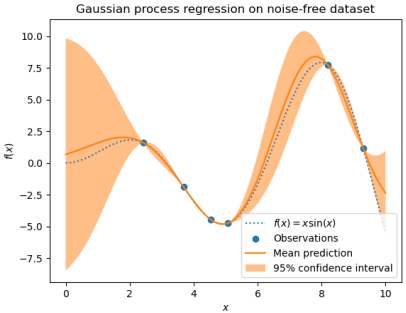
高斯过程

高斯过程

随机过程 $\{X(t): t \geq 0\}$ 中，若 $\forall n \forall t_1, t_2, \ldots, t_n [X(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$ 具有多维高斯分布，则它被称为高斯过程。

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是维纳过程，则 $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 的每一个都可以表示成独立正态随随机变量 $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ 的线性组合。因此维纳过程也是高斯过程。

- 例子：布朗桥运动、积分布朗运动



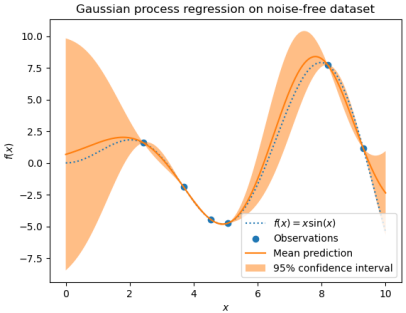
高斯过程

高斯过程

随机过程 $\{X(t): t \geq 0\}$ 中，若 $\forall n \forall t_1, t_2, \ldots, t_n [X(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$ 具有多维高斯分布，则它被称为高斯过程。

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是维纳过程，则 $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 的每一个都可以表示成独立正态随随机变量 $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ 的线性组合。因此维纳过程也是高斯过程。

- 例子：布朗桥运动、积分布朗运动



平稳随机过程

定义：严平稳过程

严平稳过程

统计性质不随机时间变化的随机过程，称为 严平稳随机过程 ，简称 严平稳过程 。即

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

例：遍历的连续时间马尔可夫链

证明

设 π_j 是连续时间马尔可夫链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的极限分布率，当 $P[X(0) = j] = \pi_j$ 时，$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程。

马尔可夫链到达极限分布后，$X(t)$ 的分布率不随机时间变化。任意多个时刻的随机变量相互独立同分布，所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

例：遍历的连续时间马尔可夫链

证明

设 π_j 是连续时间马尔可夫链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的极限分布率，当 $P[X(0) = j] = \pi_j$ 时，$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程。

马尔可夫链到达极限分布后，$X(t)$ 的分布率不随机时间变化。任意多个时刻的随机变量相互独立同分布，所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

例：泊松过程的差分

证明

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是时齐泊松过程，令 $X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 其中 $\Delta t > 0$ 是常数，那么 $X(t)$ 是严平稳过程。

由泊松过程的时齐性，$X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 仅与 Δt 有关，与 t 无关。所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

例：泊松过程的差分

证明

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是时齐泊松过程，令 $X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 其中 $\Delta t > 0$ 是常数，那么 $X(t)$ 是严平稳过程。

由泊松过程的时齐性，$X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 仅与 Δt 有关，与 t 无关。所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

定义：宽平稳过程

平稳过程

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$，若

$$\forall t, \tau \{\mathrm{E}[X(t)] = \mu_X \wedge \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)\}$$

即一二阶矩与 t 无关，那么该随机过程称为 宽平稳过程 (weak stationary stochastic process)， 广义平稳过程 或 平稳过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误， 泊松过程和维纳过程都是平稳过程 泊松过程和维纳过程都 不 是平稳过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误， 泊松过程和维纳过程都是平稳过程 泊松过程和维纳过程都 不 是平稳过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误， 泊松过程和维纳过程都是平稳过程 泊松过程和维纳过程都 不 是平稳过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

白噪声

随机过程的广义微分

定义：随机积分

设 $\{W(t): t \geq 0\}$ 为标准维纳过程，令 f 为区间 $[a, b]$ 有连续导数的函数，定义随机积分

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})], \max(t_i - t_{i-1}) \to 0$$

其中，$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个划分。

$\int \cdot \mathrm{d}W(t)$ 把函数 f 映射到 $\int f\mathrm{d}W(t)$ 可以看成一个积分算子，称为白噪声变换。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

白噪声变换的数字特征

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{E}[W(t)] = 0$$

$$\mathrm{E}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,\mathrm{E}[W(t)] = 0$$

方差可进行同理计算

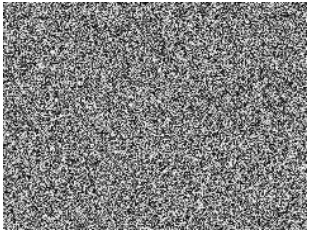
$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \implies \mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2 t$$

$$\mathrm{Var}\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}\,\mathrm{Var}[W(t)] = \sigma^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

$\{\mathrm{d}W(t) : 0 \le t < \infty\}$ 被称为白噪声，即一个时变函数 f 在白噪声的介质中传播导致在时间 b 的一个输出 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}W(t)$。

例子：电路中的噪声

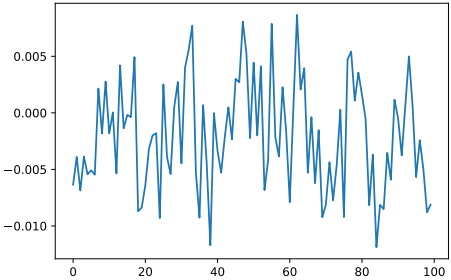
起源：与其它电路的耦合、宇宙射线、微波背景辐射、电源的串扰等。

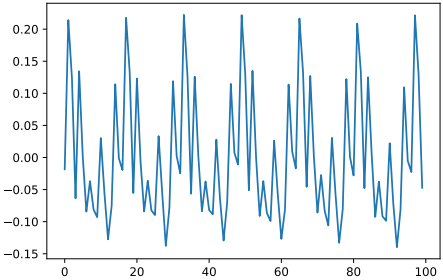


https://hep.tsinghua.edu.cn/~orv/teaching/statistics/white.ogg

例子：电子学白噪声

根据白噪声的性质，下列两图那个信号来自白噪声？





相关函数

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

标准自协方差函数

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}$$

称为 标准自协方差函数 。当 $\mu_X(t) \equiv 0$ 时

$$\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

自相关函数与功率

如果 $X(t)$ 代表电阻 R_0 两端的随机电压，那么 $\frac{X(t)^2}{R_0}$ 是功率。

$$R_X(0) = \mathrm{E}[X(t)^2]$$

代表了“功率”。

- 多个随机相位正弦波叠加的信号，总功率为各个分量功率之和。
- 借助 Fourier 分解推广，可定义功率谱密度

$$S_X(\omega)$$

其加和为 $R_X(0)$，与 $R_X(\tau)$ 互为 Fourier 变换。

遍历性与估计

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。（Landau 统计力学）
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？是否有 $\mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)] = \langle X_\omega(t)\rangle_t$？

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。(Landau 统计力学)
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？是否有 $\mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)] = \langle X_\omega(t)\rangle_t$？

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。(Landau 统计力学)
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？是否有 $\mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)] = \langle X_\omega(t)\rangle_t$？

时间均值

定义

记 $x_i = x(t_i)$

$$\hat{m}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to m, n \to \infty$$

称为 时间均值 。

如果 $\sum_0^\infty R_X(\tau) < \infty$ 那么 $\hat{m}_n \xrightarrow{P} \mu_X$，此时称过程 $X(t)$ 的均值具有 各态历经性 (ergodicity) 或 遍历性 。

- $\hat{m}_n$ 是 μ_X 的 无偏相合估计量 。
- 估计量的方差

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(\hat{m}_n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(\tau)$$

区间估计

如果相关性较弱，适用中心极限定理，可使用正态近似给出区间估计。

时间均值

定义

记 $x_i = x(t_i)$

$$\hat{m}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to m, n \to \infty$$

称为 时间均值 。

如果 $\sum_0^\infty R_X(\tau) < \infty$ 那么 $\hat{m}_n \xrightarrow{P} \mu_X$，此时称过程 $X(t)$ 的均值具有 各态历经性 (ergodicity) 或 遍历性 。

- $\hat{m}_n$ 是 μ_X 的 无偏相合估计量 。
- 估计量的方差

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(\hat{m}_n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(\tau)$$

区间估计

如果相关性较弱，适用中心极限定理，可使用正态近似给出区间估计。

自协方差函数的估计

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \mu_X)(x_{t+\tau} - \mu_X)$$

$\mathrm{Var}[\hat{r}_n(\tau)]$ 与 $\mathrm{Cov}[\hat{r}_n(s), \hat{r}_n(t)]$ 衰减速度相近，无法准确相关系数。

标准自协方差函数的估计

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{R}_n(\tau)}{\hat{R}_n(0)}$$

- Box-Ljung 统计量

$$Q = n(n+2)\sum_{1} p\frac{\hat{\rho}(\tau)^2}{n-\tau} \sim \chi^2(p)$$

可对 $\hat{\rho}(\tau)$ 做区间估计

自协方差函数的估计

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \mu_X)(x_{t+\tau} - \mu_X)$$

$\mathrm{Var}[\hat{r}_n(\tau)]$ 与 $\mathrm{Cov}[\hat{r}_n(s), \hat{r}_n(t)]$ 衰减速度相近，无法准确相关系数。

标准自协方差函数的估计

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{R}_n(\tau)}{\hat{R}_n(0)}$$

- Box-Ljung 统计量

$$Q = n(n+2)\sum_{1} p\frac{\hat{\rho}(\tau)^2}{n-\tau} \sim \chi^2(p)$$

可对 $\hat{\rho}(\tau)$ 做区间估计

总结

总结

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。
3. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。

总结

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。
3. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。

总结

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。
3. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。