平稳随机过程

续本达

清华大学 工程物理系

2024-01-03

平稳随机过程

动机

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。
3. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。

动机

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。
3. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。

动机

随机过程作为“随机的函数”太一般了，太难了。如果给它加一些限制，可以使它更有用。迄今有三类限制在随机过程的研究中取得了突破，加深了我们对随机过程的理解。

1. 马尔可夫过程（上周）
2. 鞅 martingales（数学专业或辅修培养计划中《随机过程》）
   未来给现有已知状态的增量期望为 0。与 stochastic calculus 联系紧密，在博弈论和金融中使用。
3. 平稳随机过程（stationary stochastic process 本次课）
   变量一般指时间，当变量为空间时叫做 homogeneous stochastic process。

定义：严平稳过程

严平稳过程

统计性质不随机时间变化的随机过程，称为 严平稳随机过程 ，简称 严平稳过程 。即

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

例：遍历的连续时间马尔可夫链

证明

设 π_j 是连接时间马尔可夫链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的极限分布率，当 $P[X(0) = j] = \pi_j$ 时，$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程。

马尔可夫链到达极限分布后，$X(t)$ 的分布率不随机时间变化。任意多个时刻的随机变量相互独立同分布，所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

例：遍历的连续时间马尔可夫链

证明

设 π_j 是连接时间马尔可夫链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的极限分布率，当 $P[X(0) = j] = \pi_j$ 时，$\{X(t), t \geq 0\}$ 是严平稳过程。

马尔可夫链到达极限分布后，$X(t)$ 的分布率不随机时间变化。任意多个时刻的随机变量相互独立同分布，所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

例：泊松过程的差分

证明

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是时齐泊松过程，令 $X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 其中 $\Delta t > 0$ 是常数，那么 X(t) 是严平稳过程。

由泊松过程的时齐性，$X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 仅与 Δt 有关，与 t 无关。所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

例：泊松过程的差分

证明

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是时齐泊松过程，令 $X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 其中 $\Delta t > 0$ 是常数，那么 X(t) 是严平稳过程。

由泊松过程的时齐性，$X(t) = N(t+\Delta t) - N(t)$ 仅与 Δt 有关，与 t 无关。所以

$$\forall n \forall t_1, t_2, \cdots, t_n, \tau F_{\vec{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_{\vec{X}}(t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau)$$

定义：宽平稳过程

平稳过程

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$，若

$$\forall t, \tau \{\mathrm{E}[X(t)] = \mu_X \wedge \mathrm{E}[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)\}$$

即一二阶矩与 t 无关，那么该随机过程称为 宽平稳过程 (weak stationary stochastic process)， 广义平稳过程 或 平稳过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误， ~~泊松过程和维纳过程都是平衡过程~~ 泊松过程和维纳过程都 不 是平衡过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误， ~~泊松过程和维纳过程都是平衡过程~~ 泊松过程和维纳过程都 不 是平衡过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

勘误

第五版《概率论与数理统计》教材错误，~~泊松过程和维纳过程都是平衡过程~~ 泊松过程和维纳过程都 不 是平衡过程。

泊松过程 $\mu_X(t) = \lambda t$

均值函数与 t 相关，不是平稳过程。

维纳过程 $\tau > 0, R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 t$

相关函数与 t 有关，不是平稳过程。

虽然泊松过程和维纳过程都不是平稳过程，但是它们的均值与自方差函数对时间平移的导数都是常数，可以通过微分或差分转化成平稳随机过程，称为 广义（差分）平稳随机过程 。

相关函数

平稳过程相关函数的重要性

平稳过程的均值函数为常数，因此相关函数 $R_X(\tau)$ 包含了平稳过程的主要信息。但注意，相关函数 $R_X(\tau)$ 并不能完整刻画随机过程的所有统计学性质。

例子

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists \tau \neq 0, |R_X(\tau)| = R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, g(t) \left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) g(t_i) g(t_j) \geq 0 \right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, g(t) \left[\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) g(t_i) g(t_j) \geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

平稳过程性质

1. 自协方差函数 $R_X(s,t)$ 只与 $|t-s|$ 有关
2. $R_X(\tau)$ 是偶函数，并且在 $\tau=0$ 取最大值
3. 平稳高斯过程也是严平稳过程，因为高斯过程的有限分布函数由一二阶矩完全确定。
4. 如果 $\exists\tau\neq 0, |R_X(\tau)|=R_X(0)$ 那么 $X(t)$ 是周期的
5. 如果 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续，那么 $R_X(\tau)$ 处处连续
6. $R_X(\tau)$ 非负定，即

$$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T, g(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n}R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0\right]$$

- 任意连续的非负定函数都是某平稳过程的自相关函数

标准自协方差函数

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}$$

称为 标准自协方差函数 。当 $\mu_X(t) \equiv 0$ 时

$$\rho_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

自相关函数与功率

如果 $X(t)$ 代表电阻 R_0 两端的随机电压，那么 $\frac{X(t)^2}{R_0}$ 是功率。即

$$R_X(0) = \mathrm{E}[X(t)^2]$$

代表了“功率”。

- 多个随机相位正弦波叠加的信号，总功率为各个分量功率之和。
- 借助 Fourier 分解推广，可定义功率谱密度

$$S_X(\omega)$$

其加和为 $R_X(0)$，与 $R_X(\tau)$ 互为 Fourier 变换。

遍历性与估计

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。(Landau 统计力学)
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在假想的多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。（Landau 统计力学）
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在假想的多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？

系综平均

均值函数

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$$

定义为随机过程的期望，称为 系综平均 ，是统计力学术语。

- 如果事件能在系综里假想发生，那么它就一定会在一次足够长的观测中发生。（Landau 统计力学）
- 系综平均 $\mu_X(t)$ 指在假想的多个随机过程的样本轨迹下，t 时刻观测值的平均。
- 对于平稳过程，如果观测足够长时间，是否可以与多个样本轨迹等价？即平稳过程相距较大的观测值 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间，是否可看作不相关？

时间均值

定义

记 $x_i = x(t_i)$

$$\hat{m}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to m, n \to \infty$$

称为 **时间均值** 。

如果 $\sum_0^\infty R_X(\tau) < \infty$ 那么 $\hat{m}_n \xrightarrow{P} \mu_X$，此时称过程 $X(t)$ 的均值具有 **各态历经性** (ergodicity) 或 **遍历性** 。

- $\hat{m}_n$ 是 μ_X 的 无偏相合估计量 。
- 估计量的方差

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(\hat{m}_n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(\tau)$$

区间估计

如果相关性较弱，适用中心极限定理，可使用正态近似给出区间估计。

时间均值

定义

记 $x_i = x(t_i)$

$$\hat{m}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to m, n \to \infty$$

称为 时间均值 。

如果 $\sum_0^\infty R_X(\tau) < \infty$ 那么 $\hat{m}_n \xrightarrow{P} \mu_X$，此时称过程 $X(t)$ 的均值具有 各态历经性 (ergodicity) 或 遍历性 。

- $\hat{m}_n$ 是 μ_X 的 无偏相合估计量 。
- 估计量的方差

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(\hat{m}_n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(\tau)$$

区间估计

如果相关性较弱，适用中心极限定理，可使用正态近似给出区间估计。

自协方差函数的估计

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \mu_X)(x_{t+\tau} - \mu_X)$$

$\mathrm{Var}[\hat{r}_n(\tau)]$ 与 $\mathrm{Cov}[\hat{r}_n(s), \hat{r}_n(t)]$ 衰减速度相近，无法准确相关系数。

标准自协方差函数的估计

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{R}_n(\tau)}{\hat{R}_n(0)}$$

- Box-Ljung 统计量

$$Q = n(n+2)\sum_{1}^{p}\frac{\hat{\rho}(\tau)^2}{n-\tau} \sim \chi^2(p)$$

可对 $\hat{\rho}(\tau)$ 做区间估计

自协方差函数的估计

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \mu_X)(x_{t+\tau} - \mu_X)$$

$\mathrm{Var}[\hat{r}_n(\tau)]$ 与 $\mathrm{Cov}[\hat{r}_n(s), \hat{r}_n(t)]$ 衰减速度相近，无法准确相关系数。

标准自协方差函数的估计

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{R}_n(\tau)}{\hat{R}_n(0)}$$

- Box-Ljung 统计量

$$Q = n(n+2)\sum_{1}^{p}\frac{\hat{\rho}(\tau)^2}{n-\tau} \sim \chi^2(p)$$

可对 $\hat{\rho}(\tau)$ 做区间估计

平稳时间序列

平稳随机过程的应用范围

世界并不平稳，百年未有之大变局之下，人类社会总是有各类突变。自然界也可能伴随有漂移和突变。为什么平稳随机过程的模型还有用?

1. 平稳随机过程可以较好描绘短期现象，对预测有益
2. 平稳随机过程常常可作为非平稳过程的组成部分

常见的（部分）适用平衡过程的现象

1. 年温度变化
2. 股票价格
3. 水波

平稳随机过程的应用范围

世界并不平稳，百年未有之大变局之下，人类社会总是有各类突变。自然界也可能伴随有漂移和突变。为什么平稳随机过程的模型还有用?

1. 平稳随机过程可以较好描绘短期现象，对预测有益
2. 平稳随机过程常常可作为非平稳过程的组成部分

常见的（部分）适用平衡过程的现象

1. 年温度变化
2. 股票价格
3. 水波

平稳随机过程的应用范围

世界并不平稳，百年未有之大变局之下，人类社会总是有各类突变。自然界也可能伴随有漂移和突变。为什么平稳随机过程的模型还有用?

1. 平稳随机过程可以较好描绘短期现象，对预测有益
2. 平稳随机过程常常可作为非平稳过程的组成部分

常见的（部分）适用平衡过程的现象

1. 年温度变化
2. 股票价格
3. 水波

动机

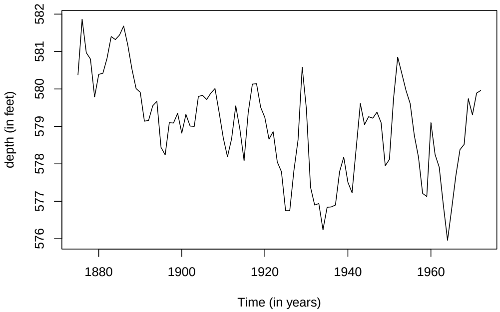
现实世界中常有随时间变化而又相互关联包含着不确定性的数据。

1. 月降雨量
2. 北京市 SARS-CoV-2 感染人数
3. 每日证券指数
4. 光电倍管输出的数字化采样

它们都能用离散参数的随机过程 $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 表示，通常称为 时间序列 。

例子：美国休伦湖深度

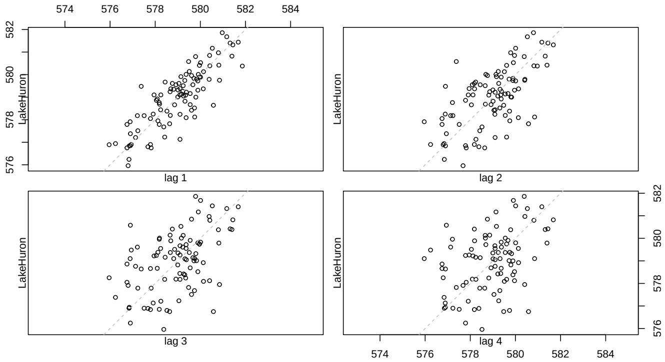
```r
plot(LakeHuron, ylab="depth (in feet)", xlab="Time (in years)")
```



相邻数据点有一定的关联，但又有明显的随机成分，时间序列的前半段呈下降趋势。

时间差图

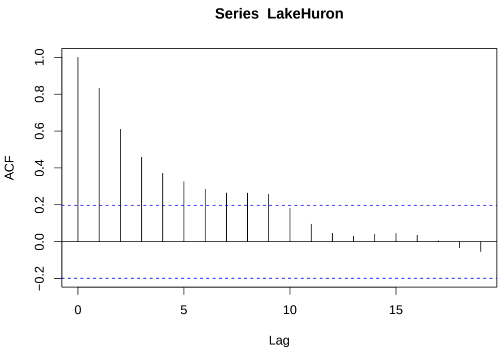
```r
lag.plot(LakeHuron, lags=4, do.lines=FALSE)
```



展再了时间序列 1, 2, 3, 4 延迟下的散点图。1 年延迟下代表相邻两个数据点有明显的相关性。从 2 到 4 ，相关性减弱。

自相关图

```r
acf(LakeHuron)
```



自相关函数高度总结了相关性，可见 1, 2, 3, 4 年延迟下，相关性递减。10 年延迟下，相关性小于 0.2，不再显著。

定义

平稳时间序列

若时间序列 $\{X_t\}$ 是平稳过程，称之为 平稳时间序列

1. $\mathrm{E}(X_t) = \mu$
2. $\mathrm{E}(X_t X_{t+\tau})$ 与 t 无关

$$\gamma_k = \mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

是平稳过程的协方差函数的离散版本。具有一般平稳过程协方差函数的所有性质：偶函数、非负定、 γ_0 最大。

自相关函数 ρ_k

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

偏相关函数

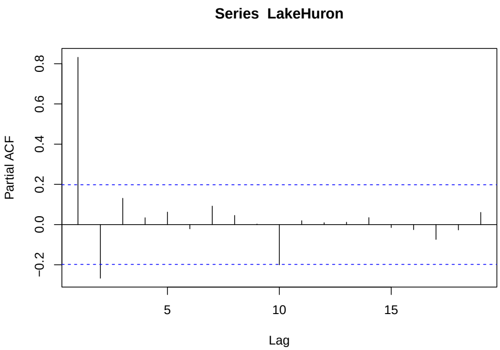
用 X_t 的前 k 个时刻的值 $X_{t-1}, \cdots, X_{t-k}$ 对 X_t 做最小二乘估计，即

$$a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kk} = \arg\min \mathrm{E}\left[\left(X_t - \sum_{i=1}^{k} a_{kk} X_{t-i}^2\right)^2\right]$$

其中 a_{kk} 称作 X_t 的 偏相关函数 。

湖深的偏相关函数

```r
pacf(LakeHuron)
```



本图体现了偏相关函数随 k 的变化，可见 $k=3$ 之后，偏相关函数值变得不显著。

AR(p) 模型

白噪声

如果时间序列 $\{\epsilon_t\}$ 满足

1. $\mathrm{E}(\epsilon_t) = 0$
2. $\mathrm{E}(\epsilon_s \epsilon_t) = \sigma^2 \delta_{st}$ 即 $\gamma_k = \delta_k \sigma^2$ 只有 $\gamma_0 = \sigma^2$

称之为 白噪声序列 。一般还可以再假设 $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ 为 高斯白噪声序列

AR(p) 过程

平稳过程 $\{X_t\}$ 被叫作 p 阶自回归 (autoregression) 过程，简记为 AR(p) 过程，如果

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \epsilon_t$$

是白噪声。ϵ_t 作是 AR 过程的 创新 (innovation) 。

- 记延迟算子 B 为

$$BX_t = X_{t-1}$$

那么 AR(p) 过程的条件可记为

$$\Phi(B)X_t = \epsilon_t$$

$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p$ 称为 AR(p) 过程的 生成多项式

- 只有 X_t 与 ϵ_t 相关

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_t, X_s) = \begin{cases} 0 & t > s \\ \sigma^2 & t = s \\ < \sigma^2 & t < s \end{cases}$$

在高斯过程中，创新也是高斯的。取 “innovation” 代表给随机过程带来新熵。

AR(p) 的性质

- 生成多项式为 $\Phi(\cdot)$ 的 AR(p) 过程的功率谱为

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$$

- 因此它的自相关函数 γ_k 作为 $S_X(\omega)$ 的 Fourier 变换，有无穷多非零项，称为 **拖尾** 的。
- 由 AR(p) 的定义知，当 $k > p$ 时，它们偏相关函数 $a_{kk} = 0$，称为 **截尾** 的。
- 由于 ϵ_t 是白噪声，即作为误差独立同分布，可以使用多线性回归模型来估计生成多项式中的系数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

例：对湖深进行 AR(1) 回归

```r
LH.yw <- ar(x=LakeHuron, order.max=1, method="yw") # Yule-Walker 方程法，矩估计法
print(LH.yw)
LH.mle <- ar(x=LakeHuron, order.max=1, method="mle")
print(LH.mle)
```

```
Call:
ar(x = LakeHuron, order.max = 1, method = "yw")

Coefficients:
     1
0.8319

Order selected 1  sigma^2 estimated as  0.5407

Call:
ar(x = LakeHuron, order.max = 1, method = "mle")

Coefficients:
     1
0.8375

Order selected 1  sigma^2 estimated as  0.5093
```

两种方法估计的 φ_1 分别为 0.8319 和 0.8375 即 $X_t = 0.8375X_{t-1} + \epsilon_t$ 。

AR(2) 回归

由于 25 给出的阶数是 2，更适合做 AR(2) 回归

```
LH.mle2 <- ar(x=LakeHuron, order.max=2, method="mle")
print(LH.mle2)
```

```
Call:
ar(x = LakeHuron, order.max = 2, method = "mle")

Coefficients:
      1        2
 1.0437  -0.2496

Order selected 2  sigma^2 estimated as  0.4788
```

故得到的回归结果为

$$X_t = 1.0437X_{t-1} - 0.2496X_{t-2} + \epsilon_t$$

为什么使用 AR(p) 过程建模?

1. 在周期不固定的信号中，替代 Fourier 变换来表达信号的关联
   - 对应于信号与系统中的 z-变换（离散）和 Laplace 变换（连续）
2. 众多随机序列是由反馈系统生成的。
   自然界和人工系统都有，滤波器。
3. AR(p) 过程可以覆盖各类平稳过程，近似各类自协方差函数和功率谱；可作统计推断。
4. 易于预测

为什么使用 AR(p) 过程建模?

1. 在周期不固定的信号中，替代 Fourier 变换来表达信号的关联
   - 对应于信号与系统中的 z-变换（离散）和 Laplace 变换（连续）
2. 众多随机序列是由反馈系统生成的。
   自然界和人工系统都有，滤波器。
3. AR(p) 过程可以覆盖各类平稳过程，近似各类自协方差函数和功率谱；可作统计推断。
4. 易于预测

为什么使用 AR(p) 过程建模?

1. 在周期不固定的信号中，替代 Fourier 变换来表达信号的关联
   - 对应于信号与系统中的 z-变换（离散）和 Laplace 变换（连续）
2. 众多随机序列是由反馈系统生成的。
   自然界和人工系统都有，滤波器。
3. AR(p) 过程可以覆盖各类平稳过程，近似各类自协方差函数和功率谱；可作统计推断。
4. 易于预测

为什么使用 AR(p) 过程建模?

1. 在周期不固定的信号中，替代 Fourier 变换来表达信号的关联
   - 对应于信号与系统中的 z-变换（离散）和 Laplace 变换（连续）
2. 众多随机序列是由反馈系统生成的。
   自然界和人工系统都有，滤波器。
3. AR(p) 过程可以覆盖各类平稳过程，近似各类自协方差函数和功率谱；可作统计推断。
4. 易于预测

为什么使用 AR(p) 过程建模?

1. 在周期不固定的信号中，替代 Fourier 变换来表达信号的关联
   - 对应于信号与系统中的 z-变换（离散）和 Laplace 变换（连续）
2. 众多随机序列是由反馈系统生成的。
   自然界和人工系统都有，滤波器。
3. AR(p) 过程可以覆盖各类平稳过程，近似各类自协方差函数和功率谱；可作统计推断。
4. 易于预测

ARMA(p, q)

MA(q) 过程

随机过程

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} = \Theta(B)\epsilon_t$$

叫做是有具有创新 $\{\epsilon_t\}$ 和生成多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$$

的滑动平均（moving-average）过程 MA(q)。
随机过程 $\{X_t\}$ 是白噪声的“滑动加权平均”，归一到常数项为 1。

MA(q) 的性质

1. MA(q) 过程是均值为 0 的平稳过程。
2. 当 $|\tau| \leq q$ 时

$$R_X(\tau) = \sigma^2 \sum_{j-k=\tau} \theta_j \theta_k$$

$$S_X(\omega) = \sigma^2 |\Theta(e^{-i\omega})|^2$$

   即相关函数截尾
3. 偏相关函数拖尾

ARMA(p, q) 过程

把 AR(p) 与 MA(q) 组合，如果

$$\Phi(B)X_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} = \Theta(B)\epsilon_t$$

称 $\{X_t\}$ 为 ARMA(p, q) 过程，有

$$S_X(\omega) = \sigma^2 \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$$

ARIMA(p, d, q) 模型

- 如果 $\{X_t\}$ 不是平稳过程，但是增量平稳，则可以对 $\{X_t\}$ 进行差分，得 $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$，再用 ARMA(p, q) 建模。
- 如果 1 阶差分过程 $\{\Delta X_t\}$ 不平稳，则可进一步考虑 2 阶差分 $\{\Delta^2 X_t\}$
- 这一方法称为 ARIMA (auto-regression integrated moving average) 模型。

ARMA(p, q) 过程

把 AR(p) 与 MA(q) 组合，如果

$$\Phi(B)X_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\epsilon_{t-q} = \Theta(B)\epsilon_t$$

称 $\{X_t\}$ 为 ARMA(p, q) 过程，有

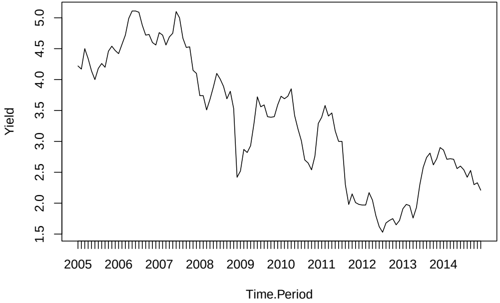
$$S_X(\omega) = \sigma^2 \frac{|\Theta(e^{-i\omega})|^2}{|\Phi(e^{-i\omega})|^2}$$

ARIMA(p, d, q) 模型

- 如果 $\{X_t\}$ 不是平稳过程，但是增量平稳，则可以对 $\{X_t\}$ 进行差分，得 $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$，再用 ARMA(p, q) 建模。
- 如果 1 阶差分过程 $\{\Delta X_t\}$ 不平稳，则可进一步考虑 2 阶差分 $\{\Delta^2 X_t\}$
- 这一方法称为 ARIMA (auto-regression integrated moving average) 模型。

例：10 年期国债收益率

```r
library(zoo)
bond <- read.csv("http://hep.tsinghua.edu.cn/~orv/teaching/statistics/bond.csv", head=TRUE)
bond$Time.Period = as.yearmon(bond$Time.Period)
plot(Yield~Time.Period, data=bond, type='l')
```



呈一定下降趋势，需要进行差分。

例：自动模型选择

```r
library(forecast)
bond <- zoo(bond$Yield, bond$Time.Period)
bond.arima <- auto.arima(bond)
print(bond.arima)
```

```
Series: bond
ARIMA(0,1,1)

Coefficients:
         ma1
      0.2536
s.e.  0.0962

sigma^2 = 0.04526:  log likelihood = 15.79
AIC=-27.58   AICc=-27.48   BIC=-22.02
```

给出 $p=0, d=1, q=1$ ，即应当 1 次差分后使用 MA(1) 模型。

预测走势

```r
plot(forecast(bond.arima, h=5), xlab="month", ylab="yield")
```