马尔可夫过程

续本达

清华大学 工程物理系

2023-12-25

复习

独立增量过程

独立增量过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，若 $\forall t_1 < \cdots < t_n (n \geq 2, t_i \in T)$ 诸增量

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个 独立增量过程 。

泊松过程 增量为泊松分布
事件发生的点间隔为指数分布

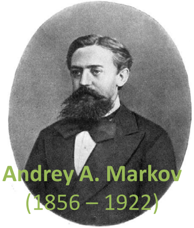
维纳过程 增量为正态分布

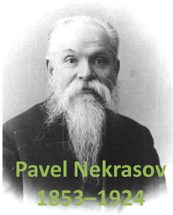
- 布朗运动，可广义求导生成白噪声。
- 是高斯过程的特例。

马尔可夫过程

起源与发展

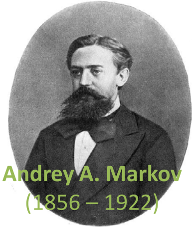
- 大数定律：$n \to \infty$，频率趋于稳定。
  - Pavel Nekrasov 认为大数定理的必要条件是随机变量的独立性，通过大数定律意味着自由意志来解释犯罪率。
  - 独立性是否是“随机事件大量重复出现时会呈现出一定规律性”的必要条件？
- 20 世纪初期，马尔可夫着手研究非独立随机事件，关于马尔可夫过程的论文最早发表于 1906 年，证明了非独立随机过程大数定理依然成立。
  - 随后，他证明了马尔可夫中心极限定理。

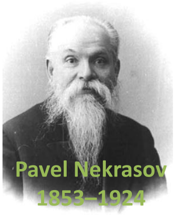

Andrey A. Markov
(1856 – 1922)


Pavel Nekrasov
1853–1924

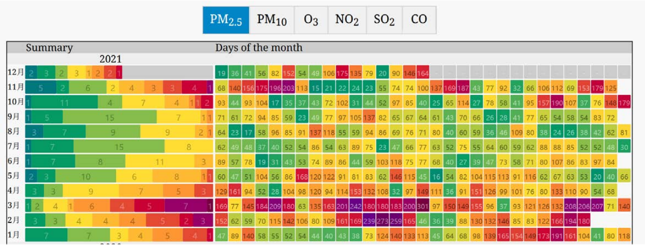
起源与发展

- 大数定律：$n \to \infty$, 频率趋于稳定。
  - Pavel Nekrasov 认为大数定理的必要条件是随机变量的独立性，通过大数定律意味着自由意志来解释犯罪率。
  - 独立性是否是“随机事件大量重复出现时会呈现出一定规律性”的必要条件?
- 20 世纪初期，马尔可夫着手研究非独立随机事件，关于马尔可夫过程的论文最早发表于 1906 年，证明了非独立随机过程大数定理依然成立。
  - 随后，他证明了马尔可夫中心极限定理。





引例：今天没有雾霾，明天呢？一周之后呢？



数据来源：北京市环境保护监测中心

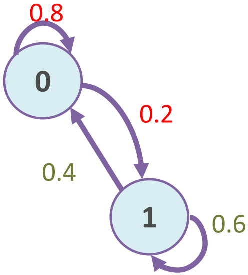
$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{若晴天} \\ 1 & \text{若雾霾} \end{cases}$$

明天

今天


$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



马尔可夫过程及其概率分布

- 由时刻 t_0 系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态，而无需借助于 t_0 之前系统或过程所处状态的历史资料。
- 过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关。

定义

在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

马尔可夫过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 其状态空间为 I. $\forall n \geq 3 \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\
=&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})
\end{aligned}
$$

则称该过程为 马尔可夫过程 。

马尔可夫过程及其概率分布

- 由时刻 t_0 系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态，而无需借助于 t_0 之前系统或过程所处状态的历史资料。
- 过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关。

定义

在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

马尔可夫过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 其状态空间为 I. $\forall n \geq 3 \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\
=&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})
\end{aligned}
$$

则称该过程为 马尔可夫过程 。

马尔可夫过程及其概率分布

- 由时刻 t_0 系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态，而无需借助于 t_0 之前系统或过程所处状态的历史资料。
- 过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关。

定义

在已经知道过程“现在”的条件下，其“将来”不依赖于“过去”。

马尔可夫过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 其状态空间为 I. $\forall n \geq 3 \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\
=&P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})
\end{aligned}
$$

则称该过程为 马尔可夫过程 。

马尔可夫过程的分类

时间和状态都离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链，记为：

$$\{X_n = X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

参数集为 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，链的状态空间为：$I = \{i_0, i_1, \cdots\}$.

	离散状态	连续状态
离散时间	马尔可夫链	连续状态马尔可夫过程
连续时间	例如泊松过程	例如维纳过程

马尔可夫过程的分类

时间和状态都离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链，记为：

$$\{X_n = X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

参数集为 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，链的状态空间为：$I = \{i_0, i_1, \cdots\}$.

	离散状态	连续状态
离散时间	马尔可夫链	连续状态马尔可夫过程
连续时间	例如泊松过程	例如维纳过程

马尔可夫链

条件概率表述

$$
\begin{aligned}
&P(X(t_n) \le x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\
=&P(X(t_n) \le x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})
\end{aligned}
$$

将时间离散化

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i) \\
=&P(X_{t+1} = j | X_t = i)
\end{aligned}
$$

n 步转移概率

- 条件概率 $p_{ij}(t,t+n) = P(X_{t+n}=j|X_t=i)$ 称为马尔可夫链在时间 t 处于状态 i 的条件下，在时间 $t+n$ 转移到状态 j 的转移概率。
- 转移概率的性质

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t,t+n) = 1, \forall i$$

- n 步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(t,t+n) & p_{12}(t,t+n) & \cdots & p_{1s}(t,t+n) & \cdots \\ p_{21}(t,t+n) & p_{22}(t,t+n) & \cdots & p_{2s}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ p_{k1}(t,t+n) & p_{k2}(t,t+n) & \cdots & p_{ks}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

每一行元素之和为 1

n 步转移概率

- 条件概率 $p_{ij}(t,t+n) = P(X_{t+n} = j | X_t = i)$ 称为马尔可夫链在时间 t 处于状态 i 的条件下，在时间 $t+n$ 转移到状态 j 的转移概率。
- 转移概率的性质

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t,t+n) = 1, \forall i$$

- n 步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(t,t+n) & p_{12}(t,t+n) & \cdots & p_{1s}(t,t+n) & \cdots \\ p_{21}(t,t+n) & p_{22}(t,t+n) & \cdots & p_{2s}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ p_{k1}(t,t+n) & p_{k2}(t,t+n) & \cdots & p_{ks}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

每一行元素之和为 1

n 步转移概率

- 条件概率 $p_{ij}(t, t+n) = P(X_{t+n} = j | X_t = i)$ 称为马尔可夫链在时间 t 处于状态 i 的条件下，在时间 $t+n$ 转移到状态 j 的转移概率。
- 转移概率的性质

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t, t+n) = 1, \forall i$$

- n 步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(t,t+n) & p_{12}(t,t+n) & \cdots & p_{1s}(t,t+n) & \cdots \\ p_{21}(t,t+n) & p_{22}(t,t+n) & \cdots & p_{2s}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ p_{k1}(t,t+n) & p_{k2}(t,t+n) & \cdots & p_{ks}(t,t+n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

每一行元素之和为 1

时齐马尔可夫链

若马尔可夫链是 时齐 的，即 $P_{ij}(t,t+n)$ 与 t 无关，则把 $P_{ij}(t,t+n)$ 记为 $p_{ij}(n)$ 时齐马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵 记为 $\mathbf{P}(n)$：

$$\mathbf{P}(n)=\begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \cdots \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

当 $n=1$ 时，一步转移概率 $p_{ij}=p_{ij}(1)=P(X_{t+1}=j|X_t=i)$。矩阵形式为

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}=:\mathbf{P}$$

时齐马尔可夫链

若马尔可夫链是 **时齐** 的，即 $P_{ij}(t,t+n)$ 与 t 无关，则把 $P_{ij}(t,t+n)$ 记为 $p_{ij}(n)$ 时齐马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵 记为 $\mathbf{P}(n)$：

$$\mathbf{P}(n)=\begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \cdots \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

当 $n=1$ 时，一步转移概率 $p_{ij}=p_{ij}(1)=P(X_{t+1}=j|X_t=i)$。矩阵形式为

$$\mathbf{P}(1)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =: \mathbf{P}$$

时齐马尔可夫链

若马尔可夫链是 时齐 的，即 $P_{ij}(t, t+n)$ 与 t 无关，则把 $P_{ij}(t, t+n)$ 记为 $p_{ij}(n)$ 时齐马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵 记为 $\mathbf{P}(n)$：

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \cdots \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

当 $n=1$ 时，一步转移概率 $p_{ij} = p_{ij}(1) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$。矩阵形式为

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} =: \mathbf{P}$$

多步转移概率

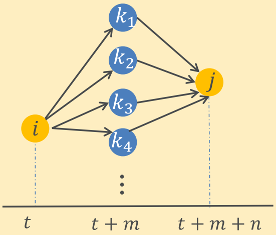
Chapman-Kolomogorov 方程

设 $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 是时齐的马尔可夫链，则 $\forall u, v \in T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，有 Chapman-Kolomogorov (C-K) 方程

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(m) p_{kj}(n), i, j = 1, 2, \cdots$$

解读

- t 时刻从状态 i 出发经过 $m+n$ 步到达状态 j。
- 在 t 时刻从状态 i 出发，先经过 m 步达到状态 k，再从 k 经过 n 步到达状态 j 。把所有可能的中间态 k 加起来。



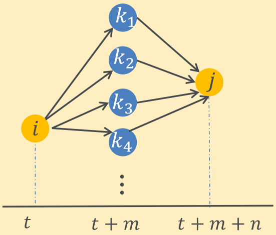
Chapman-Kolomogorov 方程

设 $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 是时齐的马尔可夫链，则 $\forall u, v \in T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，有 Chapman-Kolomogorov (C-K) 方程

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(m)p_{kj}(n), i, j = 1, 2, \cdots$$

解读

- t 时刻从状态 i 出发经过 $m+n$ 步到达状态 j。
- 在 t 时刻从状态 i 出发，先经过 m 步达到状态 k，再从 k 经过 n 步到达状态 j 。把所有可能的中间态 k 加起来。



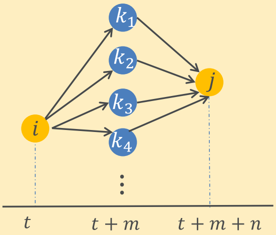
Chapman-Kolomogorov 方程

设 $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 是时齐的马尔可夫链，则 $\forall u, v \in T = \{0, 1, 2, \cdots\}$，有 Chapman-Kolomogorov (C-K) 方程

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(m)p_{kj}(n), i, j = 1, 2, \cdots$$

解读

- t 时刻从状态 i 出发经过 $m+n$ 步到达状态 j。
- 在 t 时刻从状态 i 出发，先经过 m 步达到状态 k，再从 k 经过 n 步到达状态 j 。把所有可能的中间态 k 加起来。



矩阵形式

$$\underbrace{p_{ij}(m+n)}_{m+n\text{步转移矩阵的}(i,j)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(m)p_{kj}(n)}_{\substack{m\text{步转移矩阵的第}i\text{行与}\\ n\text{步转移矩阵的第}j\text{列的内积}}} \quad , i,j = 1,2,\cdots$$

简记为

$$\mathbf{P}(m+n) = \mathbf{P}(m)\mathbf{P}(n)$$

单步递推

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}\mathbf{P}(n-1) = \mathbf{P}^2\mathbf{P}(n-2) = \mathbf{P}^n$$

时齐的马尔可夫链的有限维分布由初始分布和一步转移概率完全确定

矩阵形式

$$\underbrace{p_{ij}(m+n)}_{m+n\text{步转移矩阵的}(i,j)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(m)p_{kj}(n)}_{\substack{m\text{步转移矩阵的第}i\text{行与}\\ n\text{步转移矩阵的第}j\text{列的内积}}} \quad, i,j = 1,2,\cdots$$

简记为

$$\mathbf{P}(m+n) = \mathbf{P}(m)\mathbf{P}(n)$$

单步递推

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}\mathbf{P}(n-1) = \mathbf{P}^2\mathbf{P}(n-2) = \mathbf{P}^n$$

时齐的马尔可夫链的有限维分布由初始分布和一步转移概率完全确定

极限分布

例：北京天气

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{若晴天} \\ 1 & \text{若雾霾} \end{cases} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

```r
P <- matrix(c(0.8, 0.2, 0.4, 0.6),
            nrow=2, byrow=TRUE)
print(P) # 1 步转移概率矩阵
P2 <- P %*% P
print(P2) # 2 步转移概率矩阵
P4 <- P2 %*% P2
print(P4) # 4 步转移概率矩阵
```

```
     [,1] [,2]
[1,]  0.8  0.2
[2,]  0.4  0.6
     [,1] [,2]
[1,] 0.72 0.28
[2,] 0.56 0.44
       [,1]   [,2]
[1,] 0.6752 0.3248
[2,] 0.6496 0.3504
```

```r
S <- P4
multiplicity <- 4
for (i in 1:3) {
    S <- S %*% S
    multiplicity <- multiplicity * 2
    print(sprintf("%s 步转移概率矩阵是: ", multiplicity))
    print(S)
}
```

```
[1] "8 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]
[1,] 0.6668851 0.3331149
[2,] 0.6662298 0.3337702
[1] "16 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]
[1,] 0.6666668 0.3333332
[2,] 0.6666664 0.3333336
[1] "32 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]
[1,] 0.6666667 0.3333333
[2,] 0.6666667 0.3333333
```

极限分布

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

不论从什么状态出发，32 天后，北京晴天都概率都是 $\frac{2}{3}$，雾霾概率都是 $\frac{2}{3}$。记为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

定义 (遍历性与极限分布)

设时齐马尔可夫链的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$，若对于所有 $i, j \in I$，转移概率 $p_{ij}(n)$ 存在极限

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n),$$

则称该链具有 遍历性 。 又若 $\sum_j \pi_j = 1$， 则称行向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为该链的 极限分布 。

极限分布

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

不论从什么状态出发，32 天后，北京晴天都概率都是 $\frac{2}{3}$，雾霾概率都是 $\frac{2}{3}$。记为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

定义 (遍历性与极限分布)

设时齐马尔可夫链的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$，若对于所有 $i, j \in I$, 转移概率 $p_{ij}(n)$ 存在极限

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n),$$

则称该链具有 遍历性 。 又若 $\sum_j \pi_j = 1$， 则称行向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为该链的 极限分布 。

极限分布

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

不论从什么状态出发，32 天后，北京晴天都概率都是 $\frac{2}{3}$，雾霾概率都是 $\frac{2}{3}$。记为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

定义 (遍历性与极限分布)

设时齐马尔可夫链的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$，若对于所有 $i, j \in I$, 转移概率 $p_{ij}(n)$ 存在极限

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n),$$

则称该链具有 遍历性 。 又若 $\sum_j \pi_j = 1$， 则称行向量 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为该链的 极限分布 。

遍历性判定

定理 (遍历性的充分条件)

设时齐马尔可夫链的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\mathbf{P}$ 是它的一步转移概率矩阵。如果存在正整数 m, 使得对于任意 $i, j \in I$，有 $p_{ij}(m) > 0$，则此链具有遍历性，且其极限分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$ 是矩阵方程

$$\pi = \pi\mathbf{P}\text{即}\pi_j = \sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{ij}, j = 0, 1, 2, \cdots$$

满足 $\pi_j > 0, \sum_j \pi_j = 1$ 的唯一解。

满足上述条件的马尔可夫链的极限分布是该链的平稳分布，即若将 π 作为初始分布，那么每一时刻 t 该链的分布都是 π。

遍历性判定

定理 (遍历性的充分条件)

设时齐马尔可夫链的状态空间为 $I=\{0,1,2,\cdots\}$，$\mathbf{P}$ 是它的一步转移概率矩阵。如果存在正整数 m, 使得对于任意 $i,j\in I$，有 $p_{ij}(m)>0$，则此链具有遍历性，且其极限分布 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$ 是矩阵方程

$$\pi=\pi\mathbf{P}\text{即}\pi_j=\sum_{i=0}^{N}\pi_i p_{ij}, j=0,1,2,\cdots$$

满足 $\pi_j>0,\sum_j\pi_j=1$ 的唯一解。

满足上述条件的马尔可夫链的极限分布是该链的平稳分布，即若将 π 作为初始分布，那么每一时刻 t 该链的分布都是 π。

例：雨伞问题

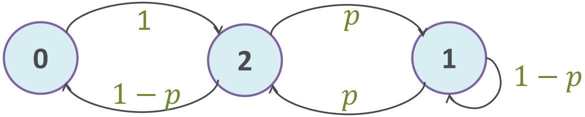
马尔可夫链的构建

例

我有 2 把雨伞用于往返于家和办公室之间。

- 若我从学校（家）出发回家（去学校）的时候正在下雨，我就会带一把雨伞去学校（回家）。
- 假定我出发时下雨的概率是 p （不依赖于过去）。
  1. 定义该过程的一个马尔可夫链。
  2. 确定我被雨淋次数的比例。
  3. 下雨概率 p 多大时，我被淋的次数最多？

令 $X(t)$ 我所在地雨伞的数量，状态空间为 $\{0, 1, 2\}$。写下一步转移概率和一步转移概率矩阵。



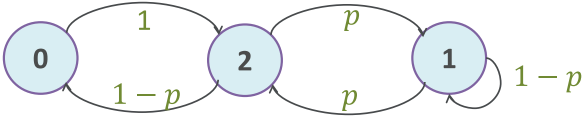
马尔可夫链的构建

例

我有 2 把雨伞用于往返于家和办公室之间。

- 若我从学校（家）出发回家（去学校）的时候正在下雨，我就会带一把雨伞去学校（回家）。
- 假定我出发时下雨的概率是 p （不依赖于过去）。
  1. 定义该过程的一个马尔可夫链。
  2. 确定我被雨淋次数的比例。
  3. 下雨概率 p 多大时，我被淋的次数最多?

令 $X(t)$ 我所在地雨伞的数量，状态空间为 $\{0, 1, 2\}$。写下一步转移概率和一步转移概率矩阵。



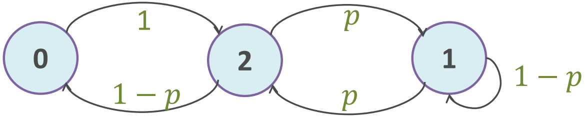
马尔可夫链的构建

例

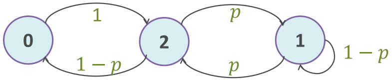
我有 2 把雨伞用于往返于家和办公室之间。

- 若我从学校（家）出发回家（去学校）的时候正在下雨，我就会带一把雨伞去学校（回家）。
- 假定我出发时下雨的概率是 p （不依赖于过去）。
  1. 定义该过程的一个马尔可夫链。
  2. 确定我被雨淋次数的比例。
  3. 下雨概率 p 多大时，我被淋的次数最多?

令 $X(t)$ 我所在地雨伞的数量，状态空间为 $\{0, 1, 2\}$。写下一步转移概率和一步转移概率矩阵。



极限分布存在



一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

```r
P <- matrix(c(0,0,1, 0,0.7,0.3, 0.7,0.3,0),
            nrow=3, byrow=3) # 假设 p=0.3
P2 <- P %*% P
print(P2)
P3 <- P %*% P2
print(P3)
P4 <- P %*% P3
print(P4)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.70 0.30 0.00
[2,] 0.21 0.58 0.21
[3,] 0.00 0.21 0.79
      [,1]  [,2]  [,3]
[1,] 0.000 0.210 0.790
[2,] 0.147 0.469 0.384
[3,] 0.553 0.384 0.063
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.5530 0.3840 0.0630
[2,] 0.2688 0.4435 0.2877
[3,] 0.0441 0.2877 0.6682
```

故 $P_{ij}(4) > 0$，根据判定定理，马尔可夫链具有遍历性。

极限分布求解

设极限分布的分布律是 $\pi = (1-a-b, a, b)$ 那么 $\pi = \pi\mathbf{P}$ 有

$$\begin{cases} 1-a-b = (1-p)b \\ (1-p)a + pb = a \end{cases} \Longrightarrow a = b = \frac{1}{3-p}$$

极限分布是

$$\left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right) \xrightarrow{p=0.3} (0.259, 0.370, 0.370)$$

```
S <- P
for (i in 1:7) {
    S <- S %*% S
}
print(sprintf("%s 步转移概率矩阵是: ", 2^7))
print(S)
```

```
[1] "128 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[2,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[3,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
```

极限分布求解

设极限分布的分布律是 $\pi = (1-a-b, a, b)$ 那么 $\pi = \pi\mathbf{P}$ 有

$$\begin{cases} 1-a-b = (1-p)b \\ (1-p)a + pb = a \end{cases} \Longrightarrow a = b = \frac{1}{3-p}$$

极限分布是

$$\left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right) \xrightarrow{p=0.3} (0.259, 0.370, 0.370)$$

```
S <- P
for (i in 1:7) {
    S <- S %*% S
}
print(sprintf("%s 步转移概率矩阵是: ", 2^7))
print(S)
```

```
[1] "128 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[2,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[3,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
```

极限分布求解

设极限分布的分布律是 $\pi = (1-a-b, a, b)$ 那么 $\pi = \pi\mathbf{P}$ 有

$$\begin{cases} 1-a-b = (1-p)b \\ (1-p)a + pb = a \end{cases} \implies a = b = \frac{1}{3-p}$$

极限分布是

$$\left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right) \xrightarrow{p=0.3} (0.259, 0.370, 0.370)$$

```r
S <- P
for (i in 1:7) {
    S <- S %*% S
}
print(sprintf("%s 步转移概率矩阵是: ", 2^7))
print(S)
```

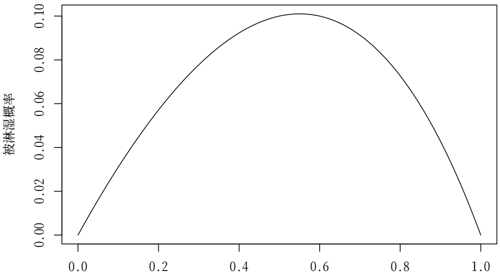
```
[1] "128 步转移概率矩阵是: "
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[2,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
[3,] 0.2592593 0.3703704 0.3703704
```

被雨淋的比例

- 我被淋湿这件事等价于“处于状态 0 并且下雨”，即

$$p\pi_0 = \frac{p(1-p)}{3-p}$$

```
p_list <- (0:100) / 100
plot(p_list, (1-p_list)/(3-p_list) * p_list, type='l', xlab="下雨概率 p", ylab="被淋湿概率")
```

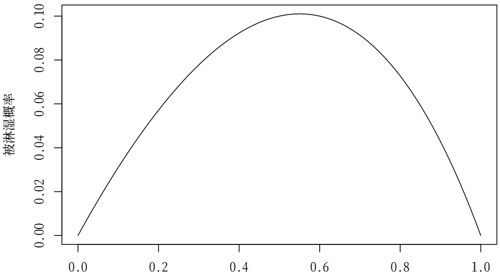


被雨淋的比例

- 我被淋湿这件事等价于“处于状态 0 并且下雨”，即

$$p\pi_0 = \frac{p(1-p)}{3-p}$$

```r
p_list <- (0:100) / 100
plot(p_list, (1-p_list)/(3-p_list) * p_list, type='l', xlab="下雨概率 p", ylab="被淋湿概率")
```



不等式放缩求极值

$$
\begin{aligned}
\frac{1-p}{3-p} \times p &= \frac{1}{\frac{3}{p} + \frac{2}{1-p}} = \frac{1}{\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{p} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{1-p}} \\
&\le \frac{\sqrt{3}\frac{p}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\frac{1-p}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = 0.10
\end{aligned}
$$

其中使用到了调和平均数小于等于算术平均数的不等式。等号成立的条件是

$$
\frac{\sqrt{3}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{1-p}
$$

$$
\Longrightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 0.55
$$

不等式放缩求极值

$$\frac{1-p}{3-p}\times p = \frac{1}{\frac{3}{p}+\frac{2}{1-p}} = \frac{1}{\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{p}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{1-p}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}\frac{p}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\frac{1-p}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = 0.10$$

其中使用到了调和平均数小于等于算术平均数的不等式。 等号成立的条件是

$$\frac{\sqrt{3}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{1-p}$$

$$\Longrightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 0.55$$

例：赌徒破产

赢了不收手则必输

例

一个赌徒在每次赌博中以概率 p 赢得 1 元，以 $q = 1-p$ 输 1 元。假设各次赌博独立，赌徒在开始的时候拥有 i 元的资产，试计算他的财富在到达 0 之前先到达 N 的概率。

记 $X(t)$ 为赌徒在时间 t 的财富，状态集为 $I = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ 我们可以写出一步转移概率矩阵：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N-1 & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & \cdots & & \\
q & 0 & p & & \cdots & & \\
 & q & 0 & p & \cdots & & \\
 & & q & 0 & \cdots & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \cdots & 0 & p \\
 & & & & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

赢了不收手则必输

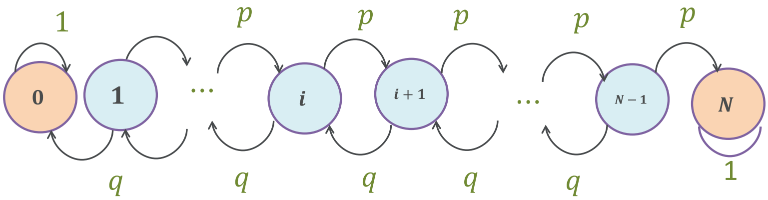
例

一个赌徒在每次赌博中以概率 p 赢得 1 元，以 $q=1-p$ 输 1 元。假设各次赌博独立，赌徒在开始的时候拥有 i 元的资产，试计算他的财富在到达 0 之前先到达 N 的概率。

记 $X(t)$ 为赌徒在时间 t 的财富，状态集为 $I=\{0,1,2,\cdots,N\}$ 我们可以写出一步转移概率矩阵：

$$
\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \\ N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N-1 & N \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & \cdots & & \\
q & 0 & p & & \cdots & & \\
 & q & 0 & p & \cdots & & \\
 & & q & 0 & \cdots & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \cdots & 0 & p \\
 & & & & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

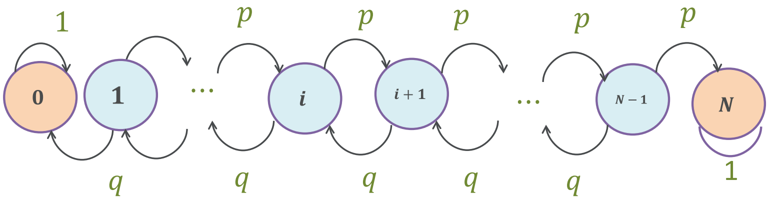
达到小目标 N 的概率



设 P_i 为赌徒拥有财富 i 且最终财富能达到 N 的概率。有

$$
\begin{aligned}
& P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \\
\Longrightarrow\ & (p+q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \\
\Longrightarrow\ & P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), i = 1, 2, 3, \cdots, N-1
\end{aligned}
$$

达到小目标 N 的概率



设 P_i 为赌徒拥有财富 i 且最终财富能达到 N 的概率。有

$$
\begin{aligned}
& P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \\
\Longrightarrow\ & (p+q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \\
\Longrightarrow\ & P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}), i = 1, 2, 3, \cdots, N-1
\end{aligned}
$$

极限

已知 $P_0 = 0$

$$\left\{\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p} P_1 \\ P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 \\ &\cdots \\ P_i - P_{i=1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1 \end{aligned}\right. \implies P_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{若} p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{若} p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $N \to \infty$ 时

$$P_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i & \text{若} p > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{若} p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

若不收手，则终将破产。

极限

已知 $P_0 = 0$

$$\left\{\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p} P_1 \\ P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 \\ &\cdots \\ P_i - P_{i=1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1 \end{aligned}\right. \Longrightarrow P_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{若} p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} & \text{若} p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $N \to \infty$ 时

$$P_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i & \text{若} p > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{若} p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

若不收手，则终将破产。

数值试验，无极限分布

设上限 $N = 3$，赢的概率是 0.499，输的概率是 0.501

```
## 1 步转移矩阵为
P <- matrix(c(1,0,0,0, 0.501,0,0.499,0, 0,0.501,0,0.499, 0,0,0,1), nrow=4, byrow=TRUE)
print(P)

S <- P
for (i in 1:11) {
  S <- S %*% S
}
print(sprintf("%s 步转移矩阵是: ", 2^11))
print(S)
```

```
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 1.000 0.000 0.000 0.000
[2,] 0.501 0.000 0.499 0.000
[3,] 0.000 0.501 0.000 0.499
[4,] 0.000 0.000 0.000 1.000
[1] "2048 步转移矩阵是: "
          [,1] [,2] [,3]      [,4]
[1,] 1.0000000    0    0 0.0000000
[2,] 0.6679991    0    0 0.3320009
[3,] 0.3346676    0    0 0.6653324
[4,] 0.0000000    0    0 1.0000000
```

2048 步之后，转移概率矩阵趋于极限，但无对应的状态的极限分布。

数值试验，无极限分布

设上限 $N = 3$，赢的概率是 0.499，输的概率是 0.501

```
## 1 步转移矩阵为
P <- matrix(c(1,0,0,0, 0.501,0,0.499,0, 0,0.501,0,0.499, 0,0,0,1), nrow=4, byrow=TRUE)
print(P)

S <- P
for (i in 1:11) {
  S <- S %*% S
}
print(sprintf("%s 步转移矩阵是: ", 2^11))
print(S)
```

```
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 1.000 0.000 0.000 0.000
[2,] 0.501 0.000 0.499 0.000
[3,] 0.000 0.501 0.000 0.499
[4,] 0.000 0.000 0.000 1.000
[1] "2048 步转移矩阵是: "
          [,1] [,2] [,3]      [,4]
[1,] 1.0000000    0    0 0.0000000
[2,] 0.6679991    0    0 0.3320009
[3,] 0.3346676    0    0 0.6653324
[4,] 0.0000000    0    0 1.0000000
```

2048 步之后，转移概率矩阵趋于极限，但无对应的状态的极限分布。

例：蒙特卡罗

马尔可夫链蒙特卡罗方法

- Metropolis（1915–1999，希腊）对舍选法的改进方案
  - 只知道随机变量 X 一个相对的概率密度函数 $f(x)$
  - 把 $f(x_i)$ 与上一个采样点 $f(x_{i-1})$ 比较，决定是否保留。
  - 以概率 $\min\left[1, \dfrac{f(x_i)}{f(x_{i-1})}\right]$ 接受 x_i ，否则令 $x_i = x_{i-1}$
- x_i 构成马尔可夫链 X_i 的一个采样
  - 极限分布的概率密度函数为

$$\frac{f(x)}{\int f(x)\mathrm{d}x}$$

- 收敛性质被 Hastings 系统证明，被称为 Metropolis-Hastings 方法。