随机过程

续本达

清华大学 工程物理系

2023-12-18

复习

贝叶斯统计概念

Laplace 法则

$$L = \frac{k+1}{n+2}$$

- n 次 p 成功率的 Bernoulli 实验的成功次数 k，满足二项分布

$$P(k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- 把 p 看成随机变量，按贝叶斯公式，

$$P(p|k,n) = \frac{P(k|p,n)P(p|n)}{P(k|n)}$$

  - $P(p|n)$ 是 p 的 先验分布
  - $P(p|k,n)$ 是 p 的 后验分布
  - $P(k|p,n)$ 是 p 的 似然函数
  - $P(k|n)$ 叫做 evidence

贝叶斯统计方法

点估计 后验期望估计量

区间估计 后验分布的区间直接使用参数的后验分布，不必构造枢轴量

1. ~~选取枢轴量~~
2. 由分位点定义建立不等式
3. ~~解出不等式~~

多层级模型与假设检验，通过数据进行假设检验，也叫作 模型选择

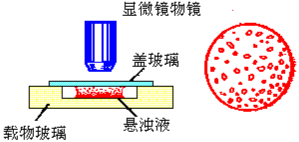
$$P(H_i|D) = \frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_0)P(H_0) + P(D|H_1)P(H_1)}$$

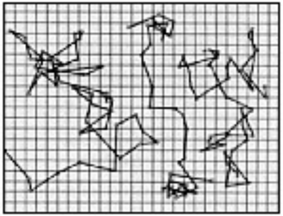
得到 H_0 和 H_1 的后验分布

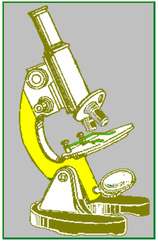
引例

布朗运动

- 悬浮在液体中的花粉在显微镜中显现无规则运动



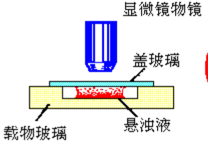


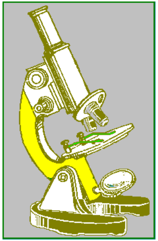


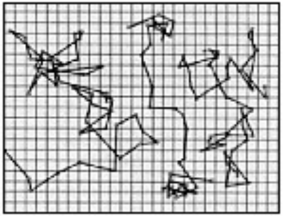
- 悬浮在空气中的气溶胶（0.02 μmto0.5 μm）是病毒（0.02 μm to 0.3 μm）的载体，在空气中无规则运动。

布朗运动

- 悬浮在液体中的花粉在显微镜中显现无规则运动





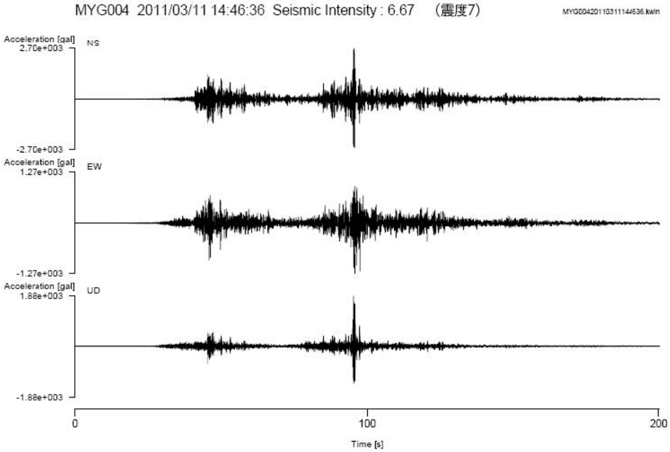


- 悬浮在空气中的气溶胶（0.02 µmto0.5 µm）是病毒（0.02 µm to 0.3 µm）的载体，在空气中无规则运动。

地震发生

- 地震可能造成重大灾害，预测地震是人类的努力方向

地震发生



- 但是至今我们无预测地震，地震的发生时刻和强度是随机的

随机过程

概念

- 随机过程的研究对象是 随时间演变的随机现象 。
- 不能用随机变量或多维随机变量来合理表达，而需要用一族无限多个随机变量来描述。

定义

随机过程是一族随机变量 $\{X(t): t \in T\}$, 其中 t 是 参数 ,T 称为 参数集 .

- 一般地，t 表示时间。对于每一个 $t \in T$ ，$X(t)$ 是一个随机变量，称 $X(t)$ 为时刻 t 时 过程的状态 。
- $X(t)$ 所有可能取值的全体称为随机过程的 状态空间 。

概念

- 随机过程的研究对象是 随时间演变的随机现象 。
- 不能用随机变量或多维随机变量来合理表达，而需要用一族无限多个随机变量来描述。

定义

随机过程是一族随机变量 $\{X(t) : t \in T\}$, 其中 t 是 参数 ,T 称为 参数集 .

- 一般地, t 表示时间。对于每一个 $t \in T$ ，$X(t)$ 是一个随机变量，称 $X(t)$ 为时刻 t 时 过程的状态 。
- $X(t)$ 所有可能取值的全体称为随机过程的 状态空间 。

概念

- 随机过程的研究对象是 随时间演变的随机现象 。
- 不能用随机变量或多维随机变量来合理表达，而需要用一族无限多个随机变量来描述。

定义

随机过程是一族随机变量 $\{X(t) : t \in T\}$, 其中 t 是 参数 ,T 称为 参数集 .

- 一般地, t 表示时间。对于每一个 $t \in T$ ，$X(t)$ 是一个随机变量，称 $X(t)$ 为时刻 t 时 过程的状态 。
- $X(t)$ 所有可能取值的全体称为随机过程的 状态空间 。

概念

- 随机过程的研究对象是 随时间演变的随机现象 。
- 不能用随机变量或多维随机变量来合理表达，而需要用一族无限多个随机变量来描述。

定义

随机过程是一族随机变量 $\{X(t): t \in T\}$, 其中 t 是 参数 ,T 称为 参数集 .

- 一般地, t 表示时间。对于每一个 $t \in T$ ，$X(t)$ 是一个随机变量，称 $X(t)$ 为时刻 t 时 过程的状态 。
- $X(t)$ 所有可能取值的全体称为随机过程的 状态空间 。

样本函数

定义

对随机过程 $\{X(t) : t \in T\}$ 进行一次试验（即在 T 上进行一次全程观测），其结果是 t 的函数，记为 $\{x(t) : t \in T\}$，称为随机过程的一个 样本函数 。

随机过程观测获得样本函数，如同总体观测获得个体样本

符号化

把随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 写成

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

的形式，其中 ω, Ω 分别是随机试验的 样本点 和 样本空间 。

- 固定一个时间 t_0，随机过程对应于一个随机变量 $X(t_0)$。
- 固定 $\omega_0 \in \Omega$ 让 t 在 T 中变化， $X(\omega_0, t)$ 是定义 在 T 上的一个实函数，称之为对应于 ω_0 的一个 样本函数 或者 样本轨道 。

样本函数

定义

对随机过程 $\{X(t) : t \in T\}$ 进行一次试验（即在 T 上进行一次全程观测），其结果是 t 的函数，记为 $\{x(t) : t \in T\}$，称为随机过程的一个 样本函数 。

随机过程观测获得样本函数，如同总体观测获得个体样本

符号化

把随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 写成

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

的形式，其中 ω, Ω 分别是随机试验的 样本点 和 样本空间 。

- 固定一个时间 t_0，随机过程对应于一个随机变量 $X(t_0)$。
- 固定 $\omega_0 \in \Omega$ 让 t 在 T 中变化， $X(\omega_0, t)$ 是定义 在 T 上的一个实函数，称之为对应于 ω_0 的一个 样本函数 或者 样本轨道 。

样本函数

定义

对随机过程 $\{X(t) : t \in T\}$ 进行一次试验（即在 T 上进行一次全程观测），其结果是 t 的函数，记为 $\{x(t) : t \in T\}$，称为随机过程的一个 样本函数 。

随机过程观测获得样本函数，如同总体观测获得个体样本

符号化

把随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 写成

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

的形式，其中 ω, Ω 分别是随机试验的 样本点 和 样本空间 。

- 固定一个时间 t_0，随机过程对应于一个随机变量 $X(t_0)$。
- 固定 $\omega_0 \in \Omega$ 让 t 在 T 中变化， $X(\omega_0, t)$ 是定义 在 T 上的一个实函数，称之为对应于 ω_0 的一个 样本函数 或者 样本轨道 。

样本函数

定义

对随机过程 $\{X(t) : t \in T\}$ 进行一次试验（即在 T 上进行一次全程观测），其结果是 t 的函数，记为 $\{x(t) : t \in T\}$，称为随机过程的一个 样本函数 。

随机过程观测获得样本函数，如同总体观测获得个体样本

符号化

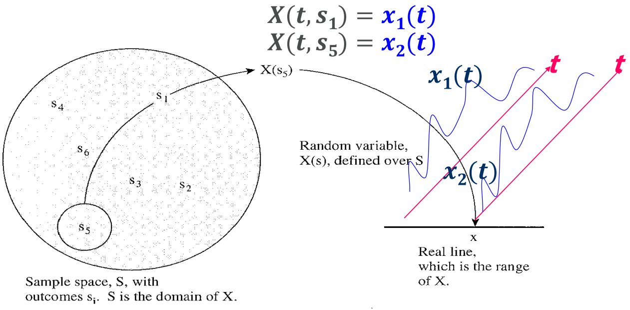
把随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 写成

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

的形式，其中 ω, Ω 分别是随机试验的 样本点 和 样本空间 。

- 固定一个时间 t_0，随机过程对应于一个随机变量 $X(t_0)$。
- 固定 $\omega_0 \in \Omega$ 让 t 在 T 中变化， $X(\omega_0, t)$ 是定义 在 T 上的一个实函数，称之为对应于 ω_0 的一个 样本函数 或者 样本轨道 。

图示

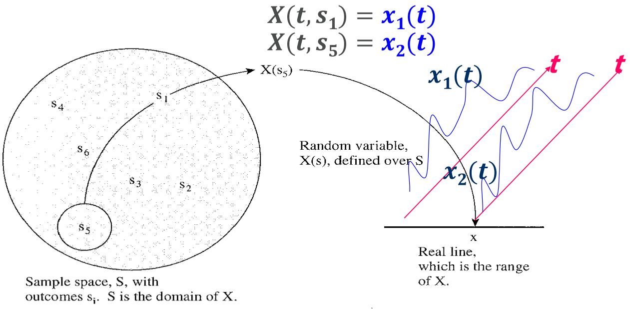


$$X(\omega,t) \equiv \Omega \ni \omega \to X(t)$$

随机过程 $\{X(\omega,t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$ 四种不同情况下的意义：

$X(\omega,t)$	t 固定	t 可变
ω 固定	确定值	样本函数
ω 可变	随机变量	随机过程

图示



$$X(\omega, t) \equiv \Omega \ni \omega \to X(t)$$

随机过程 $\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$ 四种不同情况下的意义：

$X(\omega, t)$	t 固定	t 可变
ω 固定	确定值	样本函数
ω 可变	随机变量	随机过程

分类

随机过程可根据参数集 T 和任一时刻的状态分为四类：

- 参数集 T 可分为离散集和连续集两种情况，
- 任一时刻的状态分别为 离散型随机变量 和 连续型随机变量 两种.

随机过程	参数连续	参数离散
连续型	$\checkmark$	$\checkmark$
离散型	$\checkmark$	$\checkmark$

统计学描述

分布函数族

定义

设随机过程 $\{X(t): t \in T\}$，对每一个固定的 $t \in T$，

$$F_X(x,t) = P(X(t) \leq x), x \in \mathbb{R}$$

称为随机过程 $\{X(t): t \in T\}$ 的一维分布函数，$\{F_X(x,t): t \in T\}$ 称为 一维分布函数族 。

n 维分布函数族

- 随机过程在任意时刻的状态都是随机变量。

定义

一般地，对任意 $n(=2,3,\cdots)$ 个不同时刻和 $t_1,t_2,\cdots t_n\in T$，n 维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的分布函数：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n)$$

称为随机变量 $\{X(t):t\in T\}$ 的 n 维分布函数。

$\{F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n),t_i\in T\}$ 称为 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n 维分布函数族。

- Kolomogolov 定理：有限维分布函数可以完全确定随机过程的统计特性

n 维分布函数族

- 随机过程在任意时刻的状态都是随机变量。

定义

一般地，对任意 $n(=2,3,\cdots)$ 个不同时刻和 $t_1,t_2,\cdots t_n \in T$，n 维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的分布函数：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n) = P(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n)$$

称为随机变量 $\{X(t):t\in T\}$ 的 n 维分布函数。
$\{F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n), t_i \in T\}$ 称为 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n 维分布函数族 。

- Kolomogolov 定理：有限维分布函数可以完全确定随机过程的统计特性

n 维分布函数族

- 随机过程在任意时刻的状态都是随机变量。

定义

一般地，对任意 $n(=2,3,\cdots)$ 个不同时刻和 $t_1,t_2,\cdots t_n\in T$，n 维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的分布函数：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n)$$

称为随机变量 $\{X(t):t\in T\}$ 的 n 维分布函数。
$\{F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n),t_i\in T\}$ 称为 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n 维分布函数族。

- Kolomogolov 定理：有限维分布函数可以完全确定随机过程的统计特性

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s)X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s)X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s)X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s)X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega\in\Omega, t\in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s)X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

随机过程的数字特征

给定随机过程 $\{X_\omega(t), \omega \in \Omega, t \in T\}$:

均值函数 $\mu_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t)]$

均方值函数 $\Psi_X^2(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega^2(t)]$

方差函数 $\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(t) - \mu_X(t)]^2$

标准差函数 $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{Var}_X(t)}$

相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}_\omega[X_\omega(s) X_\omega(t)]$

$$R_X(t,t) = \Psi_X^2(t)$$

协方差函数 $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \mathrm{E}([X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)]) \\ &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\ \Longrightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) \end{aligned}$$

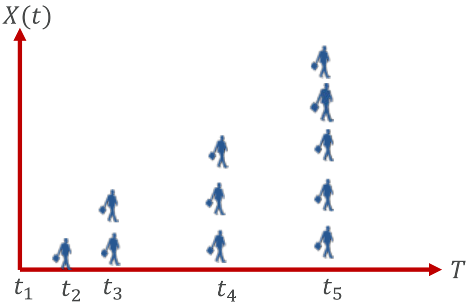
独立增量过程

引例

阿荼扫过的人数

设 $X(t)$ 为截至 t 时刻，阿荼通过自动测温仪的累计总人数。

- 增量 $X(t_2) - X(t_1)$ 表示在时间区间 $(t_1, t_2]$ 测量体温的人数。
- 不相交的时间区间的增量是相互独立的。

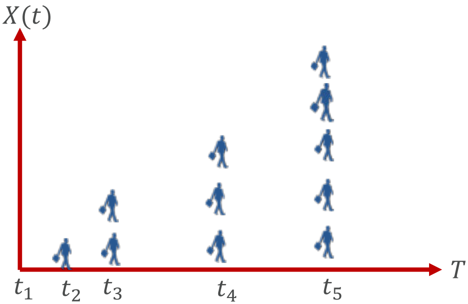


引例

阿荼扫过的人数

设 $X(t)$ 为截至 t 时刻，阿荼通过自动测温仪的累计总人数。

- 增量 $X(t_2)-X(t_1)$ 表示在时间区间 $(t_1, t_2]$ 测量体温的人数。
- 不相交的时间区间的增量是相互独立的。



定义

独立增量过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，若 $\forall t_1 < \cdots < t_n (n \geq 2, t_i \in T)$ 诸增量

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个 独立增量过程 。

性质

若 $\{X(t) : t \in T\}$ 是独立增量过程，且 $X(0) = 0$，则：

1. $X(t)$ 的有限维分布函数族可以由增量 $X(t) - X(s) (0 \leq s \leq t)$ 的分布所确定
2. 设 $\mathrm{Var}_X(t)$ 已知，则 $C_X(s,t) = \mathrm{Var}_X[\min(s,t)]$

定义

独立增量过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，若 $\forall t_1 < \cdots < t_n (n \geq 2, t_i \in T)$ 诸增量

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个 独立增量过程 。

性质

若 $\{X(t) : t \in T\}$ 是独立增量过程，且 $X(0) = 0$，则：

1. $X(t)$ 的有限维分布函数族可以由增量 $X(t) - X(s) (0 \leq s \leq t)$ 的分布所确定
2. 设 $\mathrm{Var}_X(t)$ 已知，则 $C_X(s, t) = \mathrm{Var}_X[\min(s, t)]$

泊松过程

案例特点

随机点过程 如“来到银行要求服务的顾客流”，“在一段时间内机器故障产生的故障流”等等。

计数过程 $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内随机点 (事件) 发生的数目，$N(t)$ 即为一计数过程。如，阿荼测体温的例子中，$X(t)$ 表示截至 t 时刻累计测体温的人数。

案例特点

随机点过程 如“来到银行要求服务的顾客流”，“在一段时间内机器故障产生的故障流”等等。

计数过程 $N(t)$ 表示在 $[0,t]$ 内随机点 (事件) 发生的数目，$N(t)$ 即为一计数过程。如，阿荼测体温的例子中，$X(t)$ 表示截至 t 时刻累计测体温的人数。

定义

泊松过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ (λ >0) 的 时齐泊松过程 (homogeneous Poisson process)，若满足：

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 时齐 的 独立增量过程
3. 对任意 $t > 0$ 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$

其中 $o(\Delta t)$ 是 Δt 的无穷小，即 $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

上述过程称为 泊松过程 ，因为任意长度为 t 的区间中时间个数服从均值 λt 的泊松分布。

定义

泊松过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ (λ >0) 的 时齐泊松过程 (homogeneous Poisson process)，若满足：

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 时齐 的 独立增量过程
3. 对任意 $t > 0$ 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$

   其中 $o(\Delta t)$ 是 Δt 的无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

上述过程称为 泊松过程 ，因为任意长度为 t 的区间中时间个数服从均值 λt 的泊松分布。

定义

泊松过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ (λ >0) 的 时齐泊松过程 (homogeneous Poisson process)，若满足：

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 时齐 的 独立增量过程
3. 对任意 $t > 0$ 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
   - $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$

   其中 $o(\Delta t)$ 是 Δt 的无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

上述过程称为 泊松过程 ，因为任意长度为 t 的区间中时间个数服从均值 λt 的泊松分布。

定理

例

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，则 $N(t)$ 的一维分布是参数为 λt 的泊松分布, 即对任意 $t > 0$ 有

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

数字特征：

$$\begin{aligned} \mu_N(t) =& \lambda t \\ \mathrm{Var}_N(t) =& \lambda t \\ C_N(s,t) =& \lambda \min(s,t) \end{aligned}$$

定理

例

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，则 $N(t)$ 的一维分布是参数为 λt 的泊松分布, 即对任意 $t > 0$ 有

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

数字特征：

$$\begin{aligned}
\mu_N(t) =& \lambda t \\
\mathrm{Var}_N(t) =& \lambda t \\
C_N(s, t) =& \lambda \min(s, t)
\end{aligned}$$

二项分布视角

- 将区间 $[0, t]$ 分为 k 份。
- 当 $k \to \infty$ 时，根据定义有 $P[N(s + \Delta t) - N(s) \geq 2] = o(\Delta t)$，即任意一个区间内包含两个或者两个以上的事件概率趋于 0.
- $N(t)$（以趋于 1 的概率）等于恰好含有一个事件的子区间的个数，服从二项分布 (k, p) 且 $p = \dfrac{\lambda t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right)$
- $N(t)$ 服从参数为 (k, p) 的二项分布，均值函数

$$\mu_N(t) = \lim_{k\to\infty} kp = \lim_{k\to\infty} k\left[\frac{\lambda t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)\right] = \lambda t + o(t)$$

二项分布视角

- 将区间 $[0,t]$ 分为 k 份。
- 当 $k\to\infty$ 时，根据定义有 $P[N(s+\Delta t)-N(s)\geq 2]=o(\Delta t)$，即任意一个区间内包含两个或者两个以上的事件概率趋于 0.
- $N(t)$（以趋于 1 的概率）等于恰好含有一个事件的子区间的个数，服从二项分布 (k,p) 且 $p=\dfrac{\lambda t}{k}+o\left(\dfrac{t}{k}\right)$
- $N(t)$ 服从参数为 (k,p) 的二项分布，均值函数

$$\mu_N(t)=\lim_{k\to\infty}kp=\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{\lambda t}{k}+o\left(\frac{t}{k}\right)\right]=\lambda t+o(t)$$

二项分布视角

- 将区间 $[0, t]$ 分为 k 份。
- 当 $k \to \infty$ 时，根据定义有 $P[N(s+\Delta t) - N(s) \geq 2] = o(\Delta t)$，即任意一个区间内包含两个或者两个以上的事件概率趋于 0.
- $N(t)$（以趋于 1 的概率）等于恰好含有一个事件的子区间的个数，服从二项分布 (k, p) 且 $p = \dfrac{\lambda t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right)$
- $N(t)$ 服从参数为 (k, p) 的二项分布，均值函数

$$\mu_N(t) = \lim_{k\to\infty} kp = \lim_{k\to\infty} k\left[\frac{\lambda t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)\right] = \lambda t + o(t)$$

二项分布视角

- 将区间 $[0,t]$ 分为 k 份。
- 当 $k\to\infty$ 时，根据定义有 $P[N(s+\Delta t)-N(s)\geq 2]=o(\Delta t)$，即任意一个区间内包含两个或者两个以上的事件概率趋于 0.
- $N(t)$（以趋于 1 的概率）等于恰好含有一个事件的子区间的个数，服从二项分布 (k,p) 且 $p=\dfrac{\lambda t}{k}+o\left(\dfrac{t}{k}\right)$
- $N(t)$ 服从参数为 (k,p) 的二项分布，均值函数

$$\mu_N(t)=\lim_{k\to\infty}kp=\lim_{k\to\infty}k\left[\frac{\lambda t}{k}+o\left(\frac{t}{k}\right)\right]=\lambda t+o(t)$$

指数分布视角

- 将泊松过程第 n 个事件发生时刻记为 T_n。
- 记 $W_n = T_n - T_{n-1}$ 为第 n 个事件的等待时间，特别地 $W_1 = T_1$。

定理 (泊松分布的指数间隔)

$W_n (n = 1, 2, \cdots)$ 独立地服从参数为 λ 的指数分布。

- 考虑 事件 $\{W_1 > t\}$，即区间 $[0, t]$ 中无事件，根据定义有

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

- 由全概率公式，$P(W_2 > t) = \mathrm{E}_{T_1}[P(T_2 > t | T_1)]$

$$\begin{aligned} P(W_2 > t | T_1 = s) &= P[(s, s+t]\text{中无事件} | T_1 = s] \\ &= P[(s, s+t]\text{中无事件}]\,(\text{由独立增量}) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

指数分布视角

- 将泊松过程第 n 个事件发生时刻记为 T_n。
- 记 $W_n = T_n - T_{n-1}$ 为第 n 个事件的等待时间，特别地 $W_1 = T_1$。

定理 (泊松分布的指数间隔)

$W_n (n = 1, 2, \cdots)$ 独立地服从参数为 λ 的指数分布。

- 考虑 事件 $\{W_1 > t\}$，即区间 $[0, t]$ 中无事件，根据定义有

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

- 由全概率公式，$P(W_2 > t) = \mathrm{E}_{T_1}[P(T_2 > t | T_1)]$

$$\begin{aligned} P(W_2 > t | T_1 = s) &= P[(s, s+t] \text{中无事件} | T_1 = s] \\ &= P[(s, s+t] \text{中无事件}] (\text{由独立增量}) = \quad e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

指数分布视角

- 将泊松过程第 n 个事件发生时刻记为 T_n。
- 记 $W_n = T_n - T_{n-1}$ 为第 n 个事件的等待时间，特别地 $W_1 = T_1$。

定理 (泊松分布的指数间隔)

$W_n (n = 1, 2, \cdots)$ 独立地服从参数为 λ 的指数分布。

- 考虑 事件 $\{W_1 > t\}$，即区间 $[0, t]$ 中无事件，根据定义有

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

- 由全概率公式，$P(W_2 > t) = \mathrm{E}_{T_1}[P(T_2 > t | T_1)]$

$$\begin{aligned} P(W_2 > t | T_1 = s) &= P[(s, s+t]\text{中无事件} | T_1 = s] \\ &= P[(s, s+t]\text{中无事件}] (\text{由独立增量}) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

指数分布视角

- 将泊松过程第 n 个事件发生时刻记为 T_n。
- 记 $W_n = T_n - T_{n-1}$ 为第 n 个事件的等待时间，特别地 $W_1 = T_1$。

定理 (泊松分布的指数间隔)

$W_n(n = 1, 2, \cdots)$ 独立地服从参数为 λ 的指数分布。

- 考虑 事件 $\{W_1 > t\}$，即区间 $[0, t]$ 中无事件，根据定义有

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

- 由全概率公式，$P(W_2 > t) = \mathrm{E}_{T_1}[P(T_2 > t|T_1)]$

$$\begin{aligned} P(W_2 > t|T_1 = s) =& P[(s, s+t]\text{中无事件}|T_1 = s] \\ =& P[(s, s+t]\text{中无事件}](\text{由独立增量}) = \quad e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

逆命题成立

定理 (泊松过程判定)

给定参数为 λ 的独立同分布指数随机变量列 $\{W_n\}$。称第 n 个事件在时间 $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ 发生 $(S_0 = 0)$，得到

$$N(t) = \max(n|T_n \leq t), t \geq 0$$

是强度为 λ 的时齐泊松过程。

例：泊松过程的二维分布

例

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，求 $N(t)$ 的二维分布。

对任意 $t \geq s > 0$，

$$
\begin{aligned}
& P[N(s) = i, N(t) = j] \\
=& P[N(s) = i, N(t) - N(s) = j - i] \\
=& P[N(s) = i] P[N(t) - N(s) = j - i] \text{：独立增量性} \\
=& P[N(s) = i] P[N(t - s) = j - i] \\
=& \frac{(\lambda s)^i}{i!} e^{-\lambda s} \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$

例：泊松过程的二维分布

例

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，求 $N(t)$ 的二维分布。

对任意 $t \geq s > 0$，

$$
\begin{aligned}
& P[N(s)=i, N(t)=j] \\
=& P[N(s)=i, N(t)-N(s)=j-i] \\
=& P[N(s)=i]P[N(t)-N(s)=j-i]\text{：独立增量性} \\
=& P[N(s)=i]P[N(t-s)=j-i] \\
=& \frac{(\lambda s)^i}{i!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$