区间估计

续本达

清华大学 工程物理系

2024-11-18

复习

点估计的评价

估计量判别	数字特征	
无偏性	数学期望	$\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$
有效性	方差	$\min \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$
相合性	依概率收敛	$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$
充分性		指数分布族特性

最小二乘估计

背景

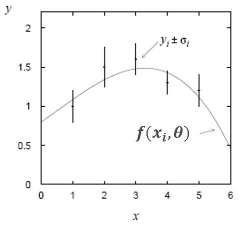
- 最小二乘估计法（Least Square Method, LSE）是自古以来最广泛使用的参数估计法之一，源于天文学和测地学上的应用。
- 当总体分布的函数形式并不严格知道、无法进行最大似然估计时，运用最小二乘法往往十分方便。
- 由 Legendre 和 Gauss 在同一时代发现。

引例

- 假设某个随机变量 Y 与 X 和未知参数 θ 有关：

$$Y = f(X;\theta)$$

- 为了估计参数 θ，在 X 的不同取值 $x_1, \cdots, x_N$ 测量 Y，得到对应的测量值 $y_1, \cdots, y_N$。然后用函数 $y = f(x, \theta)$ "拟合"数据。
- 直观来说，如果得到的"拟合"曲线与每个数据点距离越小，则该曲线所对应的参数越好。



定义

- “数据拟合”常用实现方法是最小二乘法。

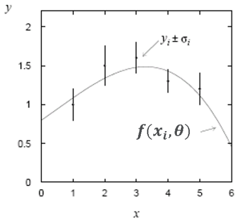
$$\chi^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^{N} [y_i - f(x_i;\theta)]^2$$

取最小值的 $\hat{\theta}$ 为估计量。

- 若在不同 x_i 处测量得到的 y_i 的精度不同，假设 y_i 的方差为 σ_i^2，则 $\chi^2(\theta)$ 定义为

$$\chi^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - f(x_i;\theta)]^2}{\sigma_i^2}$$

y_i 经常近似服从正态分布，则 $\chi^2(\theta)$ 近似服从卡方分布。



最小二乘法与最大似然法的等价性

一定条件下，最小二乘法与最大似然法等价。
假设每次测量独立，观测值 $Y_i \sim N(\eta_i, \sigma_i^2)$，其中真值 η_i 未知。
N 次观测 $\vec{Y} = (Y_1, \cdots, Y_N)$ 的似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(Y_i-\eta_i)^2}{2\sigma_i^2}} \propto e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Y_i-\eta_i}{\sigma_i}\right)^2}$$

要使 L 取最大，则要 $\sum_{i=1}^{N}(\frac{Y_i-\eta_i}{\sigma_i})^2$ 最小

最小二乘法的优势

最小二乘法有解析解，只需进行矩阵求逆。而 QR 分解等可高效完成矩阵求逆。
一般求似然函数的最大值是极难的问题。

最小二乘估计的普适性

- 指数族分布 包含正态分布、泊松分布、二项分布、伽马分布
- 在指数分布族的参数估计中， 迭代重加权最小二乘法 等价于最大似然法。

思想：最大似然估计的普适性与渐进正态

1. 最大似然估计是普适的；
2. 最大似然估计量的标准化统计量渐进服从标准正态分布；
3. 把最大似然估计量看成正态总体。
4. 最小二乘估计是合理近似。

预告

泊松回归与广义线性回归。

置信区间

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$, μ 的无偏且有效的点估计为 $\overline{X}$。

- μ 是常数，$\overline{X}$ 是随机变量。
- 不同样本算得的 μ 的估计值不同，因此除了给出 μ 的点估计外，还希望根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

定义

置信区间

设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$，假设有两个统计量 $T_1(X_1, \cdots, X_n)$, $T_2(X_1, \cdots, X_n)$，若对任意 $\theta \in \Theta$，有

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 置信区间 或 区间估计 。

- T_1 称为 (双侧) 置信下限 ，T_2 称为 (双侧) 置信上限 。
- 若满足 $P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1-\alpha$，则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间 。连续随机变量一般要求取等号。

定义

置信区间

设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$，假设有两个统计量 $T_1(X_1, \cdots, X_n)$, $T_2(X_1, \cdots, X_n)$，若对任意 $\theta \in \Theta$，有

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 置信区间 或 区间估计 。

- T_1 称为 (双侧) 置信下限 ，T_2 称为 (双侧) 置信上限 。
- 若满足 $P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1-\alpha$，则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间 。连续随机变量一般要求取等号。

定义

置信区间

设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，假设有两个统计量 $T_1(X_1, \cdots, X_n)$, $T_2(X_1, \cdots, X_n)$，若对任意 $\theta \in \Theta$，有

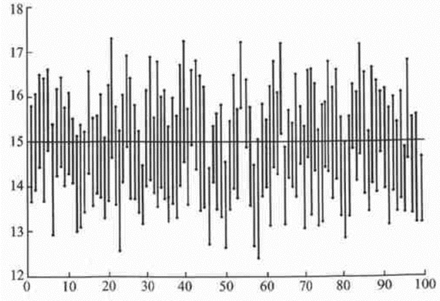
$$P(T_1 \le \theta \le T_2) \ge 1-\alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 置信区间 或 区间估计 。

- T_1 称为 (双侧) 置信下限 ，T_2 称为 (双侧) 置信上限 。
- 若满足 $P(T_1 \le \theta \le T_2) = 1-\alpha$，则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间 。连续随机变量一般要求取等号。

内涵

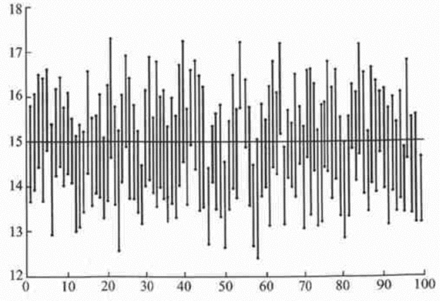
- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值，要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha)$ % 个包含 θ。



- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小，$1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时，T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

内涵

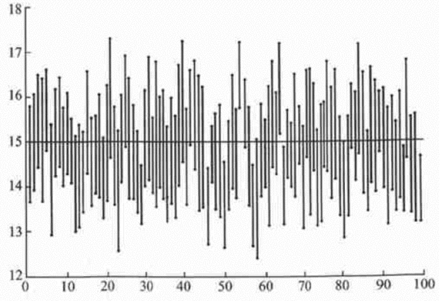
- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值, 要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha)\ \%$ 个包含 θ。



- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小，$1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时，T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

内涵

- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值, 要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha)$ % 个包含 θ。



- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小，$1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时，T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

区间估计步骤

枢轴量

定义 (枢轴量)

仅含一个待估参数的样本连续函数，且分布不依赖于未知参数。

范例：样本均值

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$，μ 的无偏且有效的点估计为 $\overline{X}$。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \Longrightarrow \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0,1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

范例：样本均值

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$，μ 的无偏且有效的点估计为 $\overline{X}$。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0,1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

范例：样本均值

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$，μ 的无偏且有效的点估计为 $\overline{X}$。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n=5$ ，要找一个区间, 使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0,1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

范例：样本均值

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$，μ 的无偏且有效的点估计为 $\overline{X}$。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0,1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

范例：从样本均值构造置信区间

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$，说明

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\Longrightarrow P(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X}+1.96\sqrt{1/5})$ 为 未知参数 μ 的 置信度为 0.95 的置信区间 。

- 若测得一组样本值, 算得 $\overline{x} = 1.86$，代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中，总的未知参数 μ 也是随机变量，此时可以写不被（教材）频率派允许的式子：

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

范例：从样本均值构造置信区间

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$，说明

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\Longrightarrow P(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X}+1.96\sqrt{1/5})$ 为 未知参数 μ 的 置信度为 0.95 的置信区间 。

- 若测得一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$，代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中，总的未知参数 μ 也是随机变量，此时可以写不被（教材）频率派允许的式子：

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

范例：从样本均值构造置信区间

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$，说明

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\Longrightarrow P(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X}+1.96\sqrt{1/5})$ 为 未知参数 μ 的 置信度为 0.95 的置信区间 。

- 若测得一组样本值, 算得 $\overline{x} = 1.86$，代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中，总的未知参数 μ 也是随机变量，此时可以写不被（教材）频率派允许的式子：

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

范例：从样本均值构造置信区间

- 取 $\alpha = 0.05$，$z_{\alpha/2} = 1.96$，说明

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\Longrightarrow P(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

  称随机区间 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ 为 未知参数 μ 的 置信度为 0.95 的置信区间 。
- 若测得一组样本值, 算得 $\overline{x} = 1.86$，代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中，总的未知参数 μ 也是随机变量，此时可以写不被（教材）频率派允许的式子：

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

总结：区间估计的步骤

1. 选取枢轴量
   寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑．由 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$。
2. 由分位点定义建立不等式
   给定置信度 $1-\alpha$，定出常数 a, b，
   $$P(a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$
   引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$
3. 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$，得置信区间 (T_1, T_2)

总结：区间估计的步骤

1. 选取枢轴量
   寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑.
   由 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$。
2. 由分位点定义建立不等式
   给定置信度 $1-\alpha$，定出常数 a, b，

$$P(a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

   引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$
3. 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$，得置信区间 (T_1, T_2)
   - 引例中区间为 $(\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5})$

总结：区间估计的步骤

1. 选取枢轴量
   寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑. 由 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0,1)$。
2. 由分位点定义建立不等式
   给定置信度 $1-\alpha$，定出常数 a, b，

$$P(a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

   引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96$，$b = z_{0.025} = +1.96$
3. 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$，得置信区间 (T_1, T_2)
   - 引例中区间为 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X}+1.96\sqrt{1/5})$

总结：区间估计的步骤

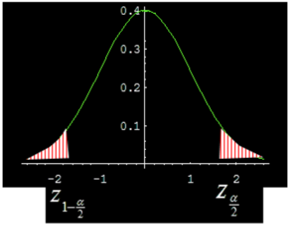
1. 选取枢轴量
   寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑.
   由 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0,1)$。
2. 由分位点定义建立不等式
   给定置信度 $1-\alpha$，定出常数 a, b，

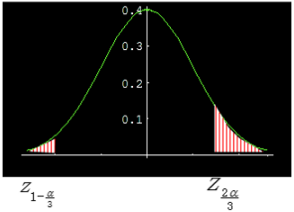
$$P(a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

   引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96$，$b = z_{0.025} = +1.96$
3. 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$，得置信区间 (T_1, T_2)
   - 引例中区间为 $(\overline{X}-1.96\sqrt{1/5}, \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5})$

等尾置信区间

- 为何要取 $z_{\alpha/2}$？当 α 固定，置信区间为 $(\overline{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{1/5}, \overline{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{1/5})$ 时，区间的长度为 $2z_{\alpha/2}\sqrt{1/5}$ 达到最短。





取 $\alpha = 0.05$

$$z_{\alpha/2}-z_{1-\alpha/2} = 1.96-(-1.96) = 3.92$$

$$z_{2\alpha/3}-z_{1-\alpha/3} = 3.96$$

```
qnorm(1-0.05* 2/3) - qnorm(0.05/3)
```

```
3.9619598700009
```

平衡“可靠性与精度关系”的原则

求参数置信区间时，先保证可靠性，再提高精度

置信区间的约定

- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $\mathrm{E}(T_2-T_1)$ 达到最短的 a 与 b。枢轴量 G 满足对称分布时通常容易实现。
- 非对称分布的总体，选平均长度 $E(T_2-T_1)$ 尽可能短的 a 与 b 往往不易实现。因此，常选择 a 与 b，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$，即 $P(G < a) = P(G > b) = \alpha/2$。这样的置信区间称为 等尾置信区间 。在 G 为偏态分布时常用这种方法。

置信区间的约定

- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $\mathrm{E}(T_2-T_1)$ 达到最短的 a 与 b。枢轴量 G 满足对称分布时通常容易实现。
- 非对称分布的总体，选平均长度 $E(T_2-T_1)$ 尽可能短的 a 与 b 往往不易实现。因此，常选择 a 与 b，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$，即 $P(G < a) = P(G > b) = \alpha/2$。这样的置信区间称为 等尾置信区间 。在 G 为偏态分布时常用这种方法。

正态总体

置信区间常用公式

- 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形
  1. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知
  2. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知
  3. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知
  4. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

置信区间常用公式

- 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形
  1. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知
  2. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知
  3. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知
  4. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

置信区间常用公式

- 单个正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的情形
  1. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知
  2. 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知
  3. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知
  4. 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\ \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

由 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 选取枢轴量

$$G(X_1,X_2,\cdots,X_n,\mu)=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}\right)=\alpha$$

确定 $z_{\alpha/2}$。解得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

由 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 选取枢轴量

$$G(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

确定 $z_{\alpha/2}$。解得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

选取枢轴量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，由

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\alpha$$

确定 $t_{\alpha/2}(n-1)$。

均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

选取枢轴量 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，由

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

确定 $t_{\alpha/2}(n-1)$。

方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ 由概率

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha$$

解得置信区间。

注意

这里的 $\chi^2_{\alpha/2}$ 和 $\chi^2_{1-\alpha/2}$ 均为上分位数。

方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ 由概率

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha$$

解得置信区间。

注意

这里的 $\chi^2_{\alpha/2}$ 和 $\chi^2_{1-\alpha/2}$ 均为 上分位数 。

方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

选取 $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 由

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

解得置信区间。

方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

选取 $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 由

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

解得置信区间。

单侧置信区间

定义

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，θ 是待估参数。$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本。若能确定一个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 或 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 使得 $P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$，或 $P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$，则称 $(-\infty, \overline{\theta})$ 或 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 为 $1-\alpha$ 置信度的单侧置信区间。

- $\underline{\theta}$：单侧置信下限，$\overline{\theta}$： 单侧置信上限

非正态总体均值的区间估计

若总体 X 的分布未知，但样本容量很大，由中心极限定理，可近似地视 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$。

总结

正态总体

	待估参数	其他参数	枢轴量及其分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2 未知	$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$	$\overline{\mu}=\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ 已知	$Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}$ $\underline{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

其它情形

- 无法解析构造枢轴量怎么办?
  - Neyman 置信带构造。
- 如果是离散分布怎么办?
  - 枢轴量难以构造，要让置信区间的实际置信度偏大
- 如果要同时构造单侧与双侧置信区间怎么办?
  - 基于似然比的统计构造方法。

参考

James Frederick, Statistical Methods In Experimental Physics, 2006