

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

区间估计

续本达

清华大学 工程物理系

2023-11-22

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

复习

估计量判别	数字特征	
无偏性	数学期望	$E(\hat{\theta}_n) = \theta$
有效性	方差	$\min \text{Var}(\hat{\theta}_n)$
相合性	依概率收敛	$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

实验物理学家的三个境界

- ① 不管随机变量的分布 → 无脑使用最小二乘法
- ② 重视随机变量的分布 → 无脑使用最大似然法
- ③ 理解参数估计理论，上过《概率统计分析及量测技术》 → 批判地选择最有效的方法

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

置信区间

已知 $X \sim N(\mu, 1)$, μ 的无偏且有效的点估计为 \bar{X} 。

- μ 是常数, \bar{X} 是随机变量。
- 不同样本算得的 μ 的估计值不同, 因此除了给出 μ 的点估计外, 还希望根据所给的样本确定一个随机区间, 使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

置信区间

设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数, X_1, \dots, X_n 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 假设有两个统计量 $T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n)$, 若对任意 $\theta \in \Theta$, 有

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq 1 - \alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的 **置信区间** 或 **区间估计**。

- T_1 称为 (双侧) **置信下限**, T_2 称为 (双侧) **置信上限**。
- 若满足 $P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$, 则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ **同等置信区间**。连续随机变量一般要求取等号。

置信区间

设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数, X_1, \dots, X_n 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 假设有两个统计量 $T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n)$, 若对任意 $\theta \in \Theta$, 有

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq 1 - \alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的 **置信区间** 或 **区间估计**。

- T_1 称为 (双侧) **置信下限**, T_2 称为 (双侧) **置信上限**。
- 若满足 $P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$, 则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ **同等置信区间**。
连续随机变量一般要求取等号。

置信区间

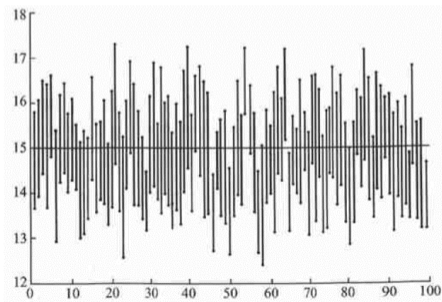
设 $\theta \in \Theta$ 是总体的一个待估参数, X_1, \dots, X_n 为来自总体的样本。对给定的实数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 假设有两个统计量 $T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n)$, 若对任意 $\theta \in \Theta$, 有

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) \geq 1 - \alpha$$

则称随机区间 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的 **置信区间** 或 **区间估计**。

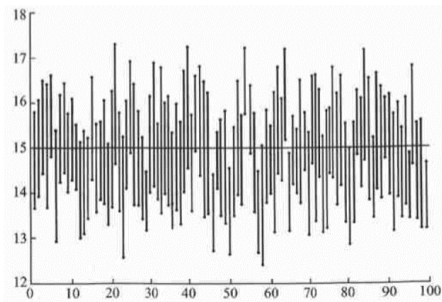
- T_1 称为 (双侧) **置信下限**, T_2 称为 (双侧) **置信上限**。
- 若满足 $P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$, 则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的 $1 - \alpha$ **同等置信区间**。连续随机变量一般要求取等号。

- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值，要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha)\%$ 个包含 θ 。



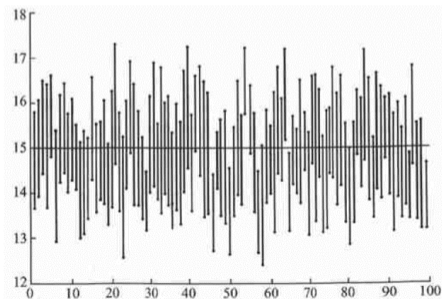
- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小， $1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时， T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值，要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha) \%$ 个包含 θ 。



- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小， $1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时， T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

- 置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释：在大量重复估计置信区间时，每次得到的样本观测值不同，从而每次得到的区间也不同。
- 对每个区间而言，要么包含未知参数 μ 的真值，要么不包含。平均而言，在这些大量的区间中，至少有 $100(1-\alpha)\%$ 个包含 θ 。



- 置信区间的长度 T_2-T_1 反映了估计精度，越小估计精度越高。
- α 反映了估计的可靠度，越小越可靠。
- α 越小， $1-\alpha$ 越大，估计的可靠度越高，但这时， T_2-T_1 往往增大，因而估计精度降低。

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

区间估计步骤

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

定义 (枢轴量)

仅含一个待估参数的样本连续函数，且分布不依赖于未知参数。

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$ ， μ 的无偏且有效的点估计为 \bar{X} 。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$ ，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0, 1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$ ， μ 的无偏且有效的点估计为 \bar{X} 。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$ ，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0, 1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$ ， μ 的无偏且有效的点估计为 \bar{X} 。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$ ，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0, 1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```


引子

已知 $X \sim N(\mu, 1)$ ， μ 的无偏且有效的点估计为 \bar{X} 。根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求。

- 设样本容量 $n = 5$ ，要找一个区间，使其包含 μ 的真值的概率为 0.95。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \implies \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}}}_{\text{枢轴量}} \sim N(0, 1)$$

- 取 $\alpha = 0.05$ ， $z_{\alpha/2} = 1.96$

```
qnorm(1 - 0.05/2)
```

```
1.95996398454005
```

- 取 $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, 说明

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\implies P(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ 为未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

- 若测得一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$, 代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中, 总的未知参数 μ 也是随机变量, 此时可以写不被 (教材) 频率派允许的式子:

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

- 取 $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, 说明

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\implies P(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ 为未知参数 μ 的 **置信度为 0.95 的置信区间**。

- 若测得一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$, 代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中, 总的未知参数 μ 也是随机变量, 此时可以写不被 (教材) 频率派允许的式子:

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

- 取 $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, 说明

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\implies P(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ 为未知参数 μ 的 **置信度为 0.95 的置信区间**。

- 若测得一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$, 代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中, 总的未知参数 μ 也是随机变量, 此时可以写不被 (教材) 频率派允许的式子:

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

- 取 $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = 1.96$, 说明

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$$

$$\implies P(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5}) = 0.95$$

称随机区间 $(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ 为未知参数 μ 的 **置信度为 0.95 的置信区间**。

- 若测得一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$, 代入得 $(0.983, 2.737)$ 它已经不再随机。但我们不为区分地称其为“置信水平为 0.95 的置信区间”。

预告：贝叶斯统计

- 贝叶斯统计中, 总的未知参数 μ 也是随机变量, 此时可以写不被 (教材) 频率派允许的式子:

$$P(0.983 \leq \mu \leq 2.737) = 0.95$$

① 选取枢轴量

寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ ，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑。由 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$ 。

② 由分位点定义建立不等式

给定置信度 $1-\alpha$ ，定出常数 a, b ，

$$P(a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$

③ 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$ ，得置信区间 (T_1, T_2)

① 选取枢轴量

寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$, 含有待估参数, 不含其它未知参数, 它的分布已知, 且分布不依赖于待估参数, 常由 θ 的点估计出发考虑. 由 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$.

② 由分位点定义建立不等式

给定置信度 $1-\alpha$, 定出常数 a, b ,

$$P(a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$

③ 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$, 得置信区间 (T_1, T_2)

引例中区间为 $(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$

① 选取枢轴量

寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$, 含有待估参数, 不含其它未知参数, 它的分布已知, 且分布不依赖于待估参数, 常由 θ 的点估计出发考虑. 由 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$.

② 由分位点定义建立不等式

给定置信度 $1-\alpha$, 定出常数 a, b ,

$$P(a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$

③ 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$, 得置信区间 (T_1, T_2)

- 引例中区间为 $(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$

① 选取枢轴量

寻找一个样本的函数 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ ，含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数，常由 θ 的点估计出发考虑。由 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/5)$ 构造枢轴量 $G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$ 。

② 由分位点定义建立不等式

给定置信度 $1-\alpha$ ，定出常数 a, b ，

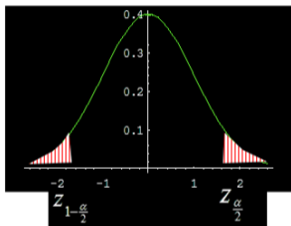
$$P(a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

引例中 $a = -z_{0.025} = -1.96, b = z_{0.025} = +1.96$

③ 解出不等式由 $a < G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) < b$ 解出 $T_1(\vec{X}) < \theta < T_2(\vec{X})$ ，得置信区间 (T_1, T_2)

- 引例中区间为 $(\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5}, \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$

- 为何要取 $z_{\alpha/2}$? 当 α 固定, 置信区间为 $(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{1/5}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{1/5})$ 时, 区间的长度为 $2z_{\alpha/2}\sqrt{1/5}$ 达到最短。



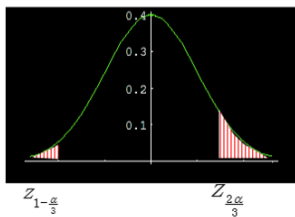
取 $\alpha = 0.05$

$$z_{\alpha/2} - z_{1-\alpha/2} = 1.96 - (-1.96) = 3.92$$

$$z_{2\alpha/3} - z_{1-\alpha/3} = 3.96$$

```
qnorm(1-0.05* 2/3) - qnorm(0.05/3)
```

3.9619598700009



平衡“可靠性与精度关系”的原则

求参数置信区间时, 先保证可靠性, 再提高精度

- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $E(T_2 - T_1)$ 达到最短的 a 与 b 。枢轴量 G 满足对称分布时通常容易实现。
- 非对称分布的总体，选平均长度 $E(T_2 - T_1)$ 尽可能短的 a 与 b 往往不易实现。因此，常选择 a 与 b ，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$ ，即 $P(G < a) = P(G > b) = \alpha/2$ 。这样的置信区间称为 **等尾置信区间**。在 G 为偏态分布时常用这种方法。

- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $E(T_2 - T_1)$ 达到最短的 a 与 b 。枢轴量 G 满足对称分布时通常容易实现。
- 非对称分布的总体，选平均长度 $E(T_2 - T_1)$ 尽可能短的 a 与 b 往往不易实现。因此，常选择 a 与 b ，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$ ，即 $P(G < a) = P(G > b) = \alpha/2$ 。这样的置信区间称为 **等尾置信区间**。在 G 为偏态分布时常用这种方法。

区间估计

续本达

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

正态总体

- 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形
 - ① 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 已知
 - ② 均值 μ 的置信区间，方差 σ^2 未知
 - ③ 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 已知
 - ④ 方差 σ^2 的置信区间，均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1), \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形
 - ① 均值 μ 的置信区间, 方差 σ^2 已知
 - ② 均值 μ 的置信区间, 方差 σ^2 未知
 - ③ 方差 σ^2 的置信区间, 均值 μ 已知
 - ④ 方差 σ^2 的置信区间, 均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1), \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形
 - ① 均值 μ 的置信区间, 方差 σ^2 已知
 - ② 均值 μ 的置信区间, 方差 σ^2 未知
 - ③ 方差 σ^2 的置信区间, 均值 μ 已知
 - ④ 方差 σ^2 的置信区间, 均值 μ 未知
- 两个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

工具回顾：正态总体样本均值和样本方差的分布

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1), \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

由 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 选取枢轴量

$$G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

确定 $z_{\alpha/2}$ 。解得 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

由 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 选取枢轴量

$$G(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

确定 $z_{\alpha/2}$ 。解得 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

选取枢轴量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 由

$$P \left(\left| \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right) = \alpha$$

确定 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 。

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

选取枢轴量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 由

$$P \left(\left| \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \right) = \alpha$$

确定 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 。

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right)$$

取枢轴量 $Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ 由概率

$$P \left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n) < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n) \right) = 1 - \alpha$$

解得置信区间。

注意

这里的 $\chi_{\alpha/2}^2$ 和 $\chi_{1-\alpha/2}^2$ 均为 **上分位数**。

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right)$$

取枢轴量 $Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$ 由概率

$$P \left(\chi_{1-\alpha/2}^2(n) < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n) \right) = 1 - \alpha$$

解得置信区间。

注意

这里的 $\chi_{\alpha/2}^2$ 和 $\chi_{1-\alpha/2}^2$ 均为 **上分位数**。

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

选取 $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 由

$$P \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right) = 1 - \alpha$$

解得置信区间。

置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

选取 $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 由

$$P \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right) = 1 - \alpha$$

解得置信区间。

定义

对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, θ 是待估参数。 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是总体 X 的样本。若能确定一个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 或 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 使得 $P(\underline{\theta} < \theta) = 1 - \alpha$, 或 $P(\theta < \bar{\theta}) = 1 - \alpha$, 则称 $(-\infty, \bar{\theta})$ 或 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 为 $1 - \alpha$ 置信度的 **单侧置信区间**。

- $\underline{\theta}$: 单侧置信下限, $\bar{\theta}$: 单侧置信上限

若总体 X 的分布未知, 但样本容量很大, 由中心极限定理, 可近似地视 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 。

复习

置信区间

区间估计步骤

正态总体

	待估参数	其他参数	枢轴量及其分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ $\sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$
	μ	σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ $\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ 已知	$Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ $\sim \chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}$ $\underline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ $\sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$ $\underline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$