点估计的评价

续本达

清华大学 工程物理系

2024-11-13

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

复习

点估计

用一个数值作为未知参数的估计值 (estimate)

设总体 X 的分布函数的形式已知, θ 是待估参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体的一个样本, 点估计就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 作为待估参数的近似值。

定义 (矩估计)

用样本 k 阶矩作为总体 k 阶矩的估计量, 建立含待估参数的方程, 从而解出待估参数。

- ① 设 X 为离散型随机变量, 其分布律为

$$P(X = x) = p(x, \theta), x = u_1, u_2, \dots, \theta \in \Theta$$

样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率分布为

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta) = L(\vec{x}, \theta)$$

- ② 设 X 是连续型变量, 取 $f(X, \theta)$ 为 X 的密度函数, 似然函数定义为

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

最大似然法: maximum likelihood estimation (MLE)

$$\hat{\theta}(\vec{x}) = \arg \max L(\vec{x}; \theta)$$

称为 **最大似然估计值**。称统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的 **最大似然估计量**。

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

评价标准

对于同一个未知参数, 不同的方法得到的估计量可能不同, 于是提出问题:

- ① 应该选用哪一种估计量?
- ② 用何标准来评价一个估计量的好坏?

预告：评判标准与数字特征紧密相关

估计量判别	数字特征
无偏性	数学期望
有效性	方差
相合性	依概率收敛

对于同一个未知参数, 不同的方法得到的估计量可能不同, 于是提出问题:

- ① 应该选用哪一种估计量?
- ② 用何标准来评价一个估计量的好坏?

预告：评判标准与数字特征紧密相关

估计量判别	数字特征
无偏性	数学期望
有效性	方差
相合性	依概率收敛

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

相合性

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是抽样自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本。证明 θ 的最大似然估计量是相合估计量。

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 。需要证明 $\hat{\theta}_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

需要知道 $\hat{\theta}_n$ 服从的分布函数。由独立同分布的随机变量的最大值的分布知， $\hat{\theta}_n$ 服从分布 $F_Y(y) = [F(y)]^n$ ，其中

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{\theta}, & 0 < y < \theta \\ 1, & y > \theta \end{cases}$$

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是抽样自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本。证明 θ 的最大似然估计量是相合估计量。

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 。需要证明 $\hat{\theta}_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

需要知道 $\hat{\theta}_n$ 服从的分布函数。由独立同分布的随机变量的最大值的分布知， $\hat{\theta}_n$ 服从分布 $F_Y(y) = [F(y)]^n$ ，其中

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{\theta}, & 0 < y < \theta \\ 1, & y > \theta \end{cases}$$

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是抽样自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本。证明 θ 的最大似然估计量是相合估计量。

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 。需要证明 $\hat{\theta}_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

需要知道 $\hat{\theta}_n$ 服从的分布函数。由独立同分布的随机变量的最大值的分布知， $\hat{\theta}_n$ 服从分布 $F_Y(y) = [F(y)]^n$ ，其中

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{\theta}, & 0 < y < \theta \\ 1, & y > \theta \end{cases}$$

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是抽样自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本。证明 θ 的最大似然估计量是相合估计量。

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 。需要证明 $\hat{\theta}_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

需要知道 $\hat{\theta}_n$ 服从的分布函数。由独立同分布的随机变量的最大值的分布知， $\hat{\theta}_n$ 服从分布 $F_Y(y) = [F(y)]^n$ ，其中

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{\theta}, & 0 < y < \theta \\ 1, & y > \theta \end{cases}$$

$\hat{\theta}_n$ 分布的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1} \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

$$E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n^2) - E^2(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

所以 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计量。

$\hat{\theta}_n$ 分布的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1} \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

$$E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n^2) - E^2(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

所以 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计量。

$\hat{\theta}_n$ 分布的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1} \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

$$E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n^2) - E^2(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

所以 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计量。

$\hat{\theta}_n$ 分布的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1} \theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

$$E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n^2) - E^2(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

所以 $\hat{\theta}_n$ 是相合估计量。

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

无偏性

定义

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

我们不可能要求每一次由样本得到的估计量与真值都相等，但可以要求这些估计量的期望与真值相等。

- 样本均值 $\bar{x}$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量。
- 样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的无偏估计量。

定义

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

我们不可能要求每一次由样本得到的估计量与真值都相等，但可以要求这些估计量的期望与真值相等。

- 样本均值 $\bar{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的 **无偏估计量**。
- 样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的 **无偏估计量**。
- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **无偏估计**。
- $B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **渐进无偏估计**。

定义

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

我们不可能要求每一次由样本得到的估计量与真值都相等，但可以要求这些估计量的期望与真值相等。

- 样本均值 $\bar{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的 **无偏估计量**。
- 样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的 **无偏估计量**。
- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **无偏估计**。
- $B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **渐进无偏估计**。

定义

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

我们不可能要求每一次由样本得到的估计量与真值都相等，但可以要求这些估计量的期望与真值相等。

- 样本均值 $\bar{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的 **无偏估计量**。
- 样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的 **无偏估计量**。
- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **无偏估计**。
- $B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **渐进无偏估计**。

定义

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

我们不可能要求每一次由样本得到的估计量与真值都相等，但可以要求这些估计量的期望与真值相等。

- 样本均值 $\bar{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的 **无偏估计量**。
- 样本二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是总体二阶原点矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的 **无偏估计量**。
- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **无偏估计**。
- $B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 是 $\text{Var}(X)$ 的 **渐进无偏估计**。

回顾相合性判定定理

定理 (期望方差)

设 $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计量。

前一个条件正是 $\hat{\theta}_n$ 的渐进无偏性。

相合性与（渐进）无偏性的区别

相合性不能推出渐进无偏性，只有渐进无偏性也不能推出相合性。

回顾相合性判定定理

定理 (期望方差)

设 $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计量。

前一个条件正是 $\hat{\theta}_n$ 的渐进无偏性。

相合性与（渐进）无偏性的区别

相合性不能推出渐进无偏性，只有渐进无偏性也不能推出相合性。

例

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是总体 $X \sim b(n, p)$ 的一个样本, $n > 1$, 求 p^2 的无偏估计量.

$$E(\bar{X}) = E(X) = np$$

$$E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p) = (n^2-n)p^2 + E(\bar{X})$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{n^2-n} \left[E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) - \bar{X} \right] = E\left[\frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1) \right]$$

$$\Rightarrow \hat{p}^2 = \frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1)$$

是无偏估计量。

例

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是总体 $X \sim b(n, p)$ 的一个样本, $n > 1$, 求 p^2 的无偏估计量.

$$E(\bar{X}) = E(X) = np$$

$$E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p) = (n^2-n)p^2 + E(\bar{X})$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{n^2-n} \left[E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) - \bar{X} \right] = E\left[\frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1) \right]$$

$$\Rightarrow \hat{p}^2 = \frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1)$$

是无偏估计量。

例

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是总体 $X \sim b(n, p)$ 的一个样本, $n > 1$, 求 p^2 的无偏估计量.

$$E(\bar{X}) = E(X) = np$$

$$E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p) = (n^2-n)p^2 + E(\bar{X})$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{n^2-n} \left[E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) - \bar{X} \right] = E\left[\frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1) \right]$$

$$\Rightarrow \hat{p}^2 = \frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1)$$

是无偏估计量。

例

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是总体 $X \sim b(n, p)$ 的一个样本, $n > 1$, 求 p^2 的无偏估计量.

$$E(\bar{X}) = E(X) = np$$

$$E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p) = (n^2-n)p^2 + E(\bar{X})$$

$$\implies p^2 = \frac{1}{n^2-n} \left[E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^2\right) - \bar{X} \right] = E\left[\frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1) \right]$$

$$\implies \hat{p}^2 = \frac{1}{(n^2-n)m} \sum_{i=1}^m X_i(X_i-1)$$

是无偏估计量。

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

有效性

定义

设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是总体参数 θ 的无偏估计量, 且 $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更**有效**.

一致最小方差无偏估计 UMVUE

如果一个估计量比任何其它估计量都有效, 则称之为**一致最小方差无偏估计** uniformly minimum variance unbiased estimator UMVUE

定义

设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是总体参数 θ 的无偏估计量, 且 $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更 **有效**.

一致最小方差无偏估计 UMVUE

如果一个估计量比任何其它估计量都有效, 则称之为 **一致最小方差无偏估计** uniformly minimum variance unbiased estimator UMVUE

定理 (Cramer-Rao 下限)

$L(X; \theta)$ 是带参数 θ 的总体 X 的似然函数。任何 θ 的无偏估计量 $\hat{\theta}_n$ 满足

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{n \text{E} \left(\frac{\partial \log L(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2}$$

达到 Cramer-Rao 理论极限的估计量称为 **有效估计量**。

以下重要结论是 **最大似然估计量** 应用的理论支撑。证明较难，不做细致讨论

- ① 如果参数存在有效无偏估计量，那么它一定是最大似然估计量
- ② 一般情况下，最大似然估计量是一致的
- ③ 最大似然估计量渐进服从正态分布

以下重要结论是 **最大似然估计量** 应用的理论支撑。证明较难，不做细致讨论

- ① 如果参数存在有效无偏估计量，那么它一定是最大似然估计量
- ② 一般情况下，最大似然估计量是一致的
- ③ 最大似然估计量渐进服从正态分布

以下重要结论是 **最大似然估计量** 应用的理论支撑。证明较难，不做细致讨论

- ① 如果参数存在有效无偏估计量，那么它一定是最大似然估计量
- ② 一般情况下，最大似然估计量是一致的
- ③ 最大似然估计量渐进服从正态分布

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是取自某总体的样本，记总体均值和方差分别为 μ 和 σ^2 。 μ 的两个估计量分别定义为 $\hat{\mu}_1 = X_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}$ 。哪个估计量更有效？

$$E(\hat{\mu}_1) = E(X_1) = \mu, E(\hat{\mu}_2) = E(\bar{X}) = \mu$$

两者都无偏。

$$\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \sigma^2, \text{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

当 $n > 1$ 时, $\text{Var}(\hat{\mu}_1) > \text{Var}(\hat{\mu}_2)$, $\hat{\mu}_2$ 更有效。

启示

- ① 用全部数据的平均估计总体均值要比只使用部分数据更有效。
- ② 数据积累，估计量的方差越来越小，参数越来越精确，信息量越来越大。

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 是取自某总体的样本，记总体均值和方差分别为 μ 和 σ^2 。 μ 的两个估计量分别定义为 $\hat{\mu}_1 = X_1$, $\hat{\mu}_2 = \bar{X}$ 。哪个估计量更有效？

$$E(\hat{\mu}_1) = E(X_1) = \mu, E(\hat{\mu}_2) = E(\bar{X}) = \mu$$

两者都无偏。

$$\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \sigma^2, \text{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

当 $n > 1$ 时， $\text{Var}(\hat{\mu}_1) > \text{Var}(\hat{\mu}_2)$ ， $\hat{\mu}_2$ 更有效。

启示

- ① 用全部数据的平均估计总体均值要比只使用部分数据更有效。
- ② 数据积累，估计量的方差越来越小，参数越来越精确，**信息量** 越来越大。

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

充分性

样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 到统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是多元函数。
压缩映射中，参数很可能减少，

- 数据中的信息是否得到保留？
- 是否存在一个统计量，概括了数据中的所有信息，因此可以替换数据？

替换数据的含义是，只要有统计量，就能算似然函数。

充分统计量

设 $\vec{X}, \vec{Y}$ 是总体的两个样本， $f(\cdot; \theta)$ 是总体的概率密度函数。

如果 $f^*(T(\vec{X})) \propto f^*(T(\vec{Y})) \implies f(\vec{X}) \propto f(\vec{Y})$ 那么称 $T(\vec{X})$ 是总体的充分统计量。

设 $X_1, X_2, \dots, X_m \sim \text{Bernoulli}(p)$ 。似然函数为

$$L(p) = p^S (1 - p)^{n-S}$$

其中 $S = \sum_i X_i$

似然函数对一切样本的依赖，都通过 S 传达， $S(\vec{X})$ 是 0-1 总体的充分统计量。

$$f(\vec{X}; \mu, \sigma^2) = ?$$

- 问题： $\vec{X}$ 本身是不是充分统计量？

$T_0(\vec{X})$ 是最小充分统计量，如果其它充分统计量都依赖于它。

$$f(\vec{X}; \theta) = g(T(\vec{X}), \theta)h(\vec{X})$$

指数分布族。

$$f(\vec{X}; \theta) = g(T(\vec{X}), \theta)h(\vec{X})$$

指数分布族。

点估计的评价

续本达

复习

评价标准

相合性

无偏性

有效性

充分性

例：截尾分布

例：截尾分布

“卡一个窗口拟合”，需要注意

- ① 窗口也是参数。
- ② 卡窗口之后，应重新归一。

- ① 不管随机变量的分布 → 无脑使用最小二乘法
- ② 重视随机变量的分布 → 无脑使用最大似然法
- ③ 理解参数估计理论，上过《概率统计分析及量测技术》 → 批判地选择最有效的方法