数学期望

续本达

清华大学 工程物理系

2023-10-18 清华

复习

二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

具有以上概率密度函数的分布称为二维正态分布。

变量替换

如果函数 $u=g_1(x,y)$ 和 $v=g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$$

则随机变量 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v)=f\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|$$

二维随机变量函数的分布

$X+Y$ 傅立叶卷积

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

XY 梅林卷积

$$f_{\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\mathrm{d}x,\ f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),\ F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

引子

为什么需要数字特征

分布函数能完整地描述随机变量的统计特性，但较复杂，实际使用中要对随机变量用一个数字概括，称为随机变量的数字特征。

例

课程的考试，比起每个同学的具体成绩，教务处更关心平均成绩和特高分和特低分的比例。教务总是希望平均分不高不低，不及格和特高分数不要太多。

与随机变量有关的数值，虽不能完整地描述随机变量，但能描述随机变量某些方面的特征，具有重要意义。

为什么需要数字特征

分布函数能完整地描述随机变量的统计特性，但较复杂，实际使用中要对随机变量用一个数字概括，称为随机变量的数字特征。

例

课程的考试，比起每个同学的具体成绩，教务处更关心平均成绩和特高分和特低分的比例。教务总是希望平均分不高不低，不及格和特高分数不要太多。

与随机变量有关的数值，虽不能完整地描述随机变量，但能描述随机变量某些方面的特征，具有重要意义。

为什么需要数字特征

分布函数能完整地描述随机变量的统计特性，但较复杂，实际使用中要对随机变量用一个数字概括，称为随机变量的数字特征。

例

课程的考试，比起每个同学的具体成绩，教务处更关心平均成绩和特高分和特低分的比例。教务总是希望平均分不高不低，不及格和特高分数不要太多。

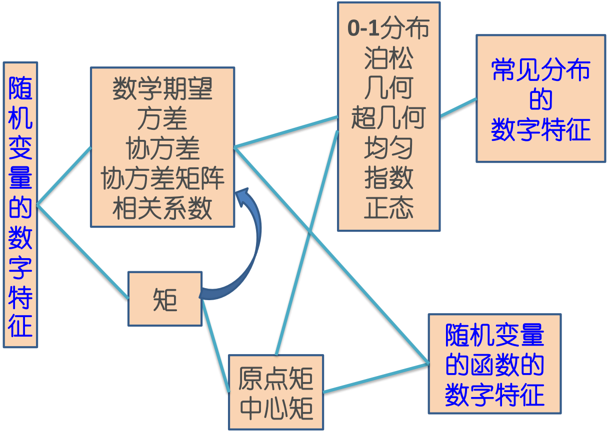
与随机变量有关的数值，虽不能完整地描述随机变量，但能描述随机变量某些方面的特征，具有重要意义。

用数字来描写随机变量的概率特性

数学期望 随机变量的平均取值

方差 随机变量取值偏离均值的情况

协方差与相关系数 描述两随机变量间的某种关系的数

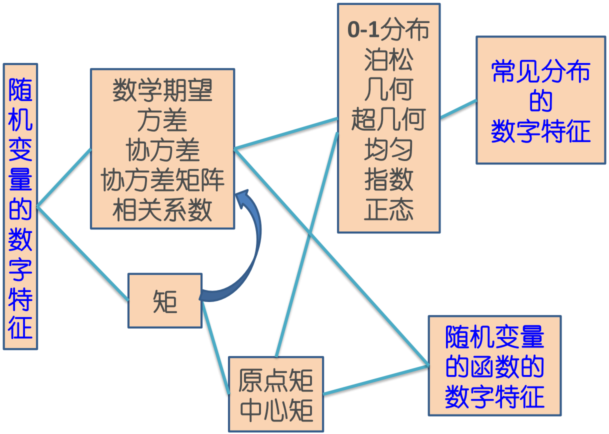


用数字来描写随机变量的概率特性

数学期望 随机变量的平均取值

方差 随机变量取值偏离均值的情况

协方差与相关系数 描述两随机变量间的某种关系的数

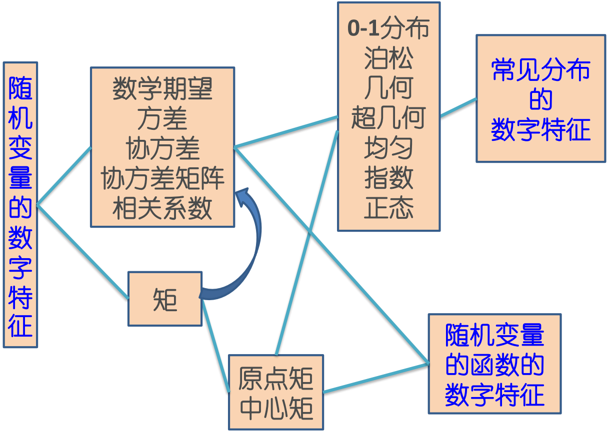


用数字来描写随机变量的概率特性

数学期望　随机变量的平均取值

方差　随机变量取值偏离均值的情况

协方差与相关系数　描述两随机变量间的某种关系的数



数学期望

定义

离散型

设 X 为离散随机变量，其分布为 $P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$，若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记作 $\mathrm{E}(X)$，即

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

连续型

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望，记作 $\mathrm{E}(X)$，即

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

定义

离散型

设 X 为离散随机变量，其分布为 $P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$，若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称该级数为 X 的数学期望，记作 $\mathrm{E}(X)$，即

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

连续型

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称该积分为 X 的数学期望，记作 $\mathrm{E}(X)$，即

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x)$$

要点

1. 数学期望的本质是“加权平均”，以概率为权重。
2. 数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 是一个数，也常记作 $\mathrm{E}[X]$，以区别于一般函数的表示。
3. 对于给定分布的随机变量，数学期望是一个数，不再是随机变量。
4. 数学期望简称为“期望”，亦称“均值”。

要点

1. 数学期望的本质是“加权平均”，以概率为权重。
2. 数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 是一个数，也常记作 $\mathrm{E}[X]$，以区别于一般函数的表示。
3. 对于给定分布的随机变量，数学期望是一个数，不再是随机变量。
4. 数学期望简称为“期望”，亦称“均值”。

要点

1. 数学期望的本质是“加权平均”，以概率为权重。
2. 数学期望 $\mathrm{E}(X)$ 是一个数，也常记作 $\mathrm{E}[X]$，以区别于一般函数的表示。
3. 对于给定分布的随机变量，数学期望是一个数，不再是随机变量。
4. 数学期望简称为“期望”，亦称“均值”。

例：良心卖家

例

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为 X（以年记），规定：

$$
\begin{array}{ll}
X \le 1 & \text{一台付款 1500 元} \\
1 < X \le 2 & \text{一台付款 2000 元} \\
2 < X \le 3 & \text{一台付款 2500 元} \\
X > 3 & \text{一台付款 3000 元}
\end{array}
$$

设寿命 X 服从指数分布，概率密度为

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}
$$

求该商店一台这种家用电器收费 Y 的数学期望。

解：良心卖家

累积分布函数 $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}, x > 0$

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= F(1) = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= F(2) - F(1) = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= F(3) - F(2) = 0.0779 \\
P(X > 3) &= 1 - F(3) = 0.7408
\end{aligned}
$$

一台家用电器收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k p_k = 2732.15$

从连续到离散

X 是连续型随机变量，映射成了 Y 是离散型随机变量

解：良心卖家

累积分布函数 $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}, x > 0$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= F(1) = 0.0952 \\
P(1 < X \leq 2) &= F(2) - F(1) = 0.0861 \\
P(2 < X \leq 3) &= F(3) - F(2) = 0.0779 \\
P(X > 3) &= 1 - F(3) = 0.7408
\end{aligned}
$$

一台家用电器收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k p_k = 2732.15$

从连续到离散

X 是连续型随机变量，映射成了 Y 是离散型随机变量

解：良心卖家

累积分布函数 $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}, x > 0$

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= F(1) = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= F(2) - F(1) = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= F(3) - F(2) = 0.0779 \\
P(X > 3) &= 1 - F(3) = 0.7408
\end{aligned}
$$

一台家用电器收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k p_k = 2732.15$

从连续到离散

X 是连续型随机变量，映射成了 Y 是离散型随机变量

例：赌场停电

分赌本问题

技能相当的两人各出 50 元对赌，五局三胜。甲胜 2 局乙胜 1 局时停电了，停止游戏，需要如何归还赌注?

- 甲 75 元乙 25 元

期望概念的起源

历史上期望（expectation）在这个问题里第一次提出。

例：赌场停电

分赌本问题

技能相当的两人各出 50 元对赌，五局三胜。甲胜 2 局乙胜 1 局时停电了，停止游戏，需要如何归还赌注?

- 甲 75 元乙 25 元

期望概念的起源

历史上期望（expectation）在这个问题里第一次提出。

例：二项分布

例

$X \sim b(n,p)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

例：二项分布

例

$X \sim b(n,p)$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np$$

例：二项分布

例

$X \sim b(n,p)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

例：二项分布

例

$X \sim b(n,p)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

例：泊松分布

例

$X \sim \pi(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

例：泊松分布

例

$X \sim \pi(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

例：泊松分布

例

$X \sim \pi(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

例：泊松分布

例

$X \sim \pi(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

例：泊松分布

例

$X \sim \pi(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

例：指数分布

例

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

例：指数分布

例

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

例：指数分布

例

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

例：指数分布

例

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

例：正态分布

例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

令 $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}u$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + u\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \mu + 0 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

例：正态分布

例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

令 $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}u$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + u\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \mu + 0 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

例：正态分布

例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

令 $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}u$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + u\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \mu + 0 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

例：正态分布

例

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

令 $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}u$，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + u\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \mu + 0 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

常见离散型随机变量的期望

分布	概率分布$P(X=k)$	期望值
$(0-1)$分布	$p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
$b(n,p)$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$\pi(\lambda)$	$\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,2,\cdots$	λ
$h(n,M)$	$C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$ $k=0,1,\cdots,r \quad r=\min\{n,M\}$	$\dfrac{nM}{N}$
$Ge(p)$	$(1-p)^{k-1}p$ $k=0\ \ 1\ \ \cdots$	$\dfrac{1}{p}$

常见连续型随机变量的期望

分布	概率密度$f(x)$		期望值
$U(a,b)$	$1/(b-a)$,	$a<x<b$	$(b+a)/2$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$,	$x>0$	$1/\lambda$
$N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,	$-\infty<x<\infty$	μ
$Ga(\alpha,\lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$,	$x\ge 0$	α/λ
$\chi^2(n)$	$\frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}$,	$x>0$	n
$Be(a,b)$	$\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$,	$0<x<1$	$a/(a+b)$
$Cau(\mu,\lambda)$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$,	$-\infty<x<\infty$	不存在
朗道分布	$\frac{1}{\xi}\phi(\lambda)$，没有解析表达式		不存在

随机函数的数学期望

定理

离散型

设离散随机变量 X 的概率分布为 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots$ 若无穷级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 Y 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$$

连续型

设连续随机变量的密度函数为 $f(x)$ 若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

定理

离散型

设离散随机变量 X 的概率分布为 $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$ 若无穷级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 Y 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$$

连续型

设连续随机变量的密度函数为 $f(x)$ 若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则

$$\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

二维情形

离散型

设二维离散随机变量 (X, Y) 的概率分布为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ，变量 $Z = g(X, Y)$，若级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则 Z 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$$

连续型

设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，变量 $Z = g(X, Y)$。若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则 Z 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二维情形

离散型

设二维离散随机变量 (X, Y) 的概率分布为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ，变量 $Z = g(X, Y)$，若级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则 Z 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$$

连续型

设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，变量 $Z = g(X, Y)$。若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则 Z 的数学期望为

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

重期望公式

重期望公式

设 (X,Y) 是二维随机变量，且 $\mathrm{E}(X)$ 存在，则

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

证明：仅对连续型变量证明。设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$。记 $g(y)=\mathrm{E}(X|Y=y)$，则 $g(Y)=\mathrm{E}(X|Y)$。利用 $f(x,y)=f(x|y)f_Y(y)$，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y) f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y)\mathrm{d}x\right] f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{E}[X|Y=y]}_{g(y)} f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}[g(y)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]
\end{aligned}$$

重期望公式

重期望公式

设 (X,Y) 是二维随机变量，且 $\mathrm{E}(X)$ 存在，则

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

证明：仅对连续型变量证明。设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$。记 $g(y)=\mathrm{E}(X|Y=y)$，则 $g(Y)=\mathrm{E}(X|Y)$。利用 $f(x,y)=f(x|y)f_Y(y)$，可得

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)\mathrm{d}x\right]f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\mathrm{E}[X|Y=y]}_{g(y)}f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{E}[g(y)]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

重期望公式

重期望公式

设 (X, Y) 是二维随机变量，且 $\mathrm{E}(X)$ 存在，则

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

证明：仅对连续型变量证明。设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$。记 $g(y) = \mathrm{E}(X|Y = y)$，则 $g(Y) = \mathrm{E}(X|Y)$。利用 $f(x, y) = f(x|y)f_Y(y)$，可得

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\mathrm{d}x\right] f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{E}[X|Y = y]}_{g(y)} f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{E}[g(y)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

重期望公式

重期望公式

设 (X,Y) 是二维随机变量，且 $\mathrm{E}(X)$ 存在，则

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$$

证明：仅对连续型变量证明。设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$。记 $g(y)=\mathrm{E}(X|Y=y)$，则 $g(Y)=\mathrm{E}(X|Y)$。利用 $f(x,y)=f(x|y)f_Y(y)$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y)\mathrm{d}x\right]f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\mathrm{E}[X|Y=y]}_{g(y)}f_Y(y)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{E}[g(y)]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]\end{aligned}$$

期望的性质

性质

a, C 是常数，X, Y 是随机变量

- $\mathrm{E}(C) = C$
- $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 一般地

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$

性质

a, C 是常数，X, Y 是随机变量

- $\mathrm{E}(C) = C$
- $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 一般地

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
  - 注意：若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$，$X, Y$ 不一定独立

性质

a, C 是常数，X, Y 是随机变量

- $\mathrm{E}(C) = C$
- $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 一般地

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
  - 注意：若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$，$X, Y$ 不一定独立

性质

a, C 是常数，X, Y 是随机变量

- $\mathrm{E}(C) = C$
- $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 一般地

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
  - 注意：若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$，$X, Y$ 不一定独立

性质

a, C 是常数，X, Y 是随机变量

- $\mathrm{E}(C) = C$
- $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 一般地

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$
  - 注意：若 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$，$X, Y$ 不一定独立

例：供应链优化

例

设国际市场对我国的稀土矿石需求量为随机变量 X（单位：吨），且服从 $[2000, 4000]$ 上的均匀分布。已知每售出一吨商品可挣得外汇 3 千元，但若积压一吨则损失 1.2 千元。问组织多少吨货源才能使收益最大化?

设组织货源 t 吨，令 $t_1 = 2000, t_2 = 4000$, 则 $t_1 \le t \le t_2$。收益 Y（千元）与需求 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 3X - 1.2(t - X), & X < t \\ 3t, & X \ge t \end{cases}$$

$X \sim U(t_1, t_2)$

例：供应链优化

例

设国际市场对我国的稀土矿石需求量为随机变量 X（单位：吨），且服从 $[2000, 4000]$ 上的均匀分布。已知每售出一吨商品可挣得外汇 3 千元，但若积压一吨则损失 1.2 千元。问组织多少吨货源才能使收益最大化？

设组织货源 t 吨，令 $t_1 = 2000, t_2 = 4000$, 则 $t_1 \le t \le t_2$。收益 Y（千元）与需求 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 3X - 1.2(t - X), & X < t \\ 3t, & X \ge t \end{cases}$$

$X \sim U(t_1, t_2)$

解：供应链优化

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) f(x) dx \\
&= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t} (4.2x - 1.2t) dx + \int_{t}^{t_2} 3t dx \right] \\
&= \frac{-2.1}{t_2 - t_1} \left[t^2 - \frac{1.2t_1 + 3t_2}{2.1} t + 2.1 t_1^2 \right]
\end{aligned}
$$

对二次式求极值，解得 $t = \frac{1.2t_1 + 3t_2}{4.2} = 3428.57$

例：CovID-19 PCR 混检

例

为了筛查社会面 CovID-19 患者，n 个人需验血．有两种方案：

1. 分别化验每个人的血，共需化验 n 次；
2. 分组化验，k 个人的血混在一起化验，若结果为阴性，则只需化验一次；若为阳性，则对 k 个人的血逐个化验，找出有病者，此时 k 个人的血需化验 $k+1$ 次．

设每人血液化验呈阳性的概率为 p，且每人化验结果是相互独立的．试说明选择哪一方案较经济．

计算方案 2 所需化验次数的期望．为简单计，不妨设 n 是 k 的倍数，共分成 $\frac{n}{k}$ 组．第 i 组的化验次数 X_i 的可能取值为 1 和 $k+1$，分布律为

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

例：CovID-19 PCR 混检

例

为了筛查社会面 CovID-19 患者，n 个人需验血. 有两种方案：

1. 分别化验每个人的血，共需化验 n 次；
2. 分组化验，k 个人的血混在一起化验，若结果为阴性，则只需化验一次；若为阳性，则对 k 个人的血逐个化验，找出有病者，此时 k 个人的血需化验 $k+1$ 次.

设每人血液化验呈阳性的概率为 p，且每人化验结果是相互独立的. 试说明选择哪一方案较经济.

计算方案 2 所需化验次数的期望. 为简单计，不妨设 n 是 k 的倍数，共分成 $\frac{n}{k}$ 组. 第 i 组的化验次数 X_i 的可能取值为 1 和 $k+1$，分布律为

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

解：CovID-19 PCR 混检 [1]

$$E(X_i) = 1 \cdot (1-p)^k + (k+1) \cdot [1-(1-p)^k] = (k+1) - k(1-p)^k$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n/k} E(X_i) = n\left\{1-\left[(1-p)^k - \frac{1}{k}\right]\right\}$$

若 $(1-p)^k - \frac{1}{k} > 0$，则 $E(X) < n$。$p \ll 1$ 时，该条件很容易满足。例如 $p = 0.001, k = 10, n = 1000$：$E(X) = 110 \ll 1000$

[1] polymerase chain reaction：用于把 DNA 片断复制亿次的生物工程方法。

解：CovID-19 PCR 混检 [1]

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \cdot (1-p)^k + (k+1) \cdot [1-(1-p)^k] = (k+1) - k(1-p)^k$$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n/k} \mathrm{E}(X_i) = n \left\{ 1 - \left[(1-p)^k - \frac{1}{k} \right] \right\}$$

若 $(1-p)^k-\frac{1}{k} > 0$，则 $\mathrm{E}(X) < n$。$p \ll 1$ 时，该条件很容易满足。例如 $p = 0.001, k = 10, n = 1000$：$\mathrm{E}(X) = 110 \ll 1000$

[1]polymerase chain reaction: 用于把 DNA 片断复制亿次的生物工程方法。

解：CovID-19 PCR 混检[1]

$$\mathrm{E}(X_i) = 1 \cdot (1-p)^k + (k+1) \cdot [1-(1-p)^k] = (k+1) - k(1-p)^k$$

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n/k} \mathrm{E}(X_i) = n\left\{1 - \left[(1-p)^k - \frac{1}{k}\right]\right\}$$

若 $(1-p)^k - \frac{1}{k} > 0$，则 $\mathrm{E}(X) < n$。$p \ll 1$ 时，该条件很容易满足。例如 $p = 0.001, k = 10, n = 1000$：$\mathrm{E}(X) = 110 \ll 1000$

[1] polymerase chain reaction：用于把 DNA 片断复制亿次的生物工程方法。

例：总降雨量

第 5 号“杜苏芮”台风残余造成北京及华北特大降雨

“北京有观测记录的 140 年以来第一大降雨”
——北京市气象局

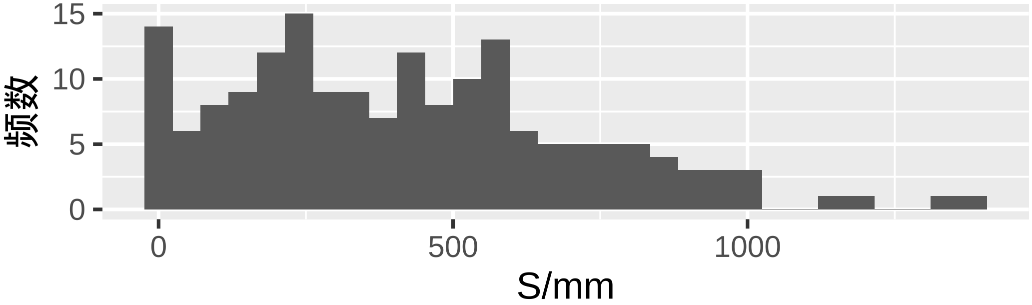
例：总降雨量

第 5 号“杜苏芮”台风残余造成北京及华北特大降雨

“北京有观测记录的 140 年以来第一大降雨”
——北京市气象局

结合自然灾害的预测进行决策

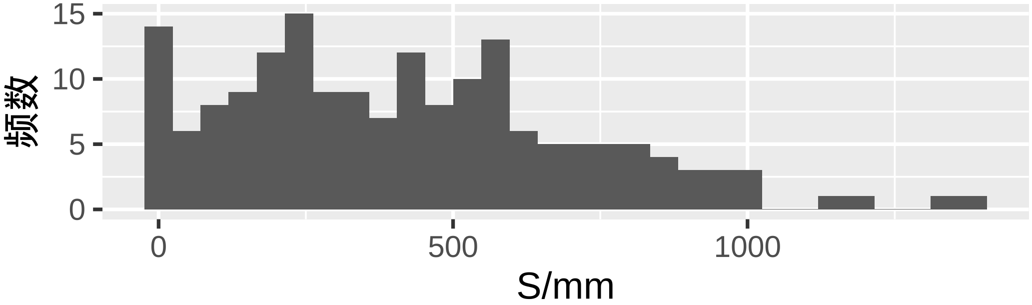
- 设北京 8 月的总降雨量为随机变量 S。



- 刻画 S 的数字特征，掌握北京的降雨规律的要点。
- 随机变量 S 的期望 $\mathrm{E}(S)$：北京 8 月的平均降雨量。

结合自然灾害的预测进行决策

- 设北京 8 月的总降雨量为随机变量 S。



- 刻画 S 的数字特征，掌握北京的降雨规律的要点。
- 随机变量 S 的**期望** $\mathrm{E}(S)$：北京 8 月的平均降雨量。

问题的条件概率分解

- S 受两个因素的影响：
  1. N：北京 8 月的**降雨次数** $\hookrightarrow$ 离散型随机变量
  2. R_i：各 (i) 次下雨的**降雨量**，独立同分布 $\hookrightarrow$ 非负的连续型随机变量

$$S=\sum_{i=1}^{N} R_i,\quad R_i \text{ 与 } N \text{ 相互独立}$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响。
  2. 当 N 确定时，单次雨量 R_i 对总雨量 S 的影响。
- 对简单的子问题可尝试使用用已知分布假设，便于计算期望：
  - 假设 N 服从 泊松分布， R_i 服从伽马分布。

问题的条件概率分解

- S 受两个因素的影响：
  1. N：北京 8 月的**降雨次数** $\hookrightarrow$ 离散型随机变量
  2. R_i：各 (i) 次下雨的**降雨量**，独立同分布 $\hookrightarrow$ 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i,\ R_i \text{ 与 } N \text{ 相互独立}$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响。
  2. 当 N 确定时，单次雨量 R_i 对总雨量 S 的影响。
- 对简单的子问题可尝试使用用已知分布假设，便于计算期望：
  - 假设 N 服从 泊松分布， R_i 服从伽马分布。

问题的条件概率分解

- S 受两个因素的影响：
  1. N：北京 8 月的**降雨次数** $\hookrightarrow$ 离散型随机变量
  2. R_i：各 (i) 次下雨的**降雨量**，独立同分布 $\hookrightarrow$ 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i,\quad R_i \text{ 与 } N \text{ 相互独立}$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响。
  2. 当 N 确定时，单次雨量 R_i 对总雨量 S 的影响。
- 对简单的子问题可尝试使用用已知分布假设，便于计算期望：
  - 假设 N 服从 泊松分布， R_i 服从伽马分布。

问题的条件概率分解

- S 受两个因素的影响：
  1. N：北京 8 月的**降雨次数** $\hookrightarrow$ 离散型随机变量
  2. R_i：各 (i) 次下雨的**降雨量**，独立同分布 $\hookrightarrow$ 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i,\quad R_i \text{ 与 } N \text{ 相互独立}$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响。
  2. 当 N 确定时，单次雨量 R_i 对总雨量 S 的影响。
- 对简单的子问题可尝试使用用已知分布假设，便于计算期望：
  - 假设 N 服从 泊松分布， R_i 服从伽马分布。

问题的条件概率分解

- S 受两个因素的影响：
  1. N：北京 8 月的**降雨次数** $\hookrightarrow$ 离散型随机变量
  2. R_i：各 (i) 次下雨的**降雨量**，独立同分布 $\hookrightarrow$ 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i, \quad R_i \text{ 与 } N \text{ 相互独立}$$

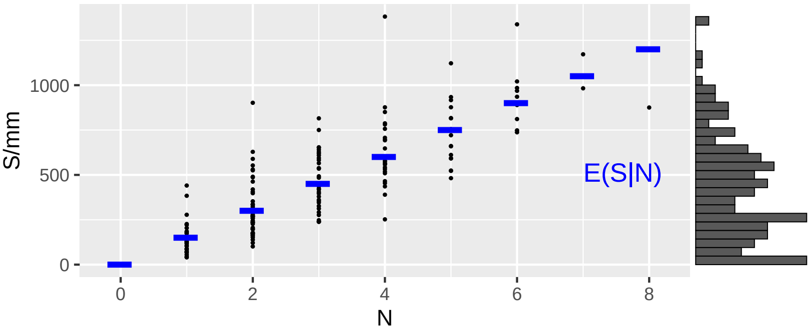
- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响。
  2. 当 N 确定时，单次雨量 R_i 对总雨量 S 的影响。
- 对简单的子问题可尝试使用用已知分布假设，便于计算期望：
  - 假设 N 服从 泊松分布， R_i 服从伽马分布。

北京 8 月降雨量期望的计算

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)]$$

- 条件分布已知时，计算期望更容易。设 $R_i (0 \le i \le N)$ 的期望是 $\mathrm{E}(R)$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i)\right] = \mathrm{E}[N \cdot \mathrm{E}(R)] = \underbrace{\mathrm{E}(N)}_{\text{平均下雨次数}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}(R)}_{\text{每场雨的平均降雨量}}$$

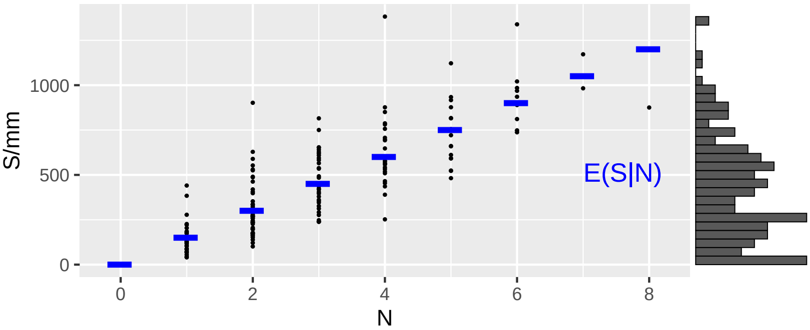


北京 8 月降雨量期望的计算

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)]$$

- 条件分布已知时，计算期望更容易。设 $R_i (0 \le i \le N)$ 的期望是 $\mathrm{E}(R)$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i)\right] = \mathrm{E}[N \cdot \mathrm{E}(R)] = \underbrace{\mathrm{E}(N)}_{\text{平均下雨次数}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}(R)}_{\text{每场雨的平均降雨量}}$$

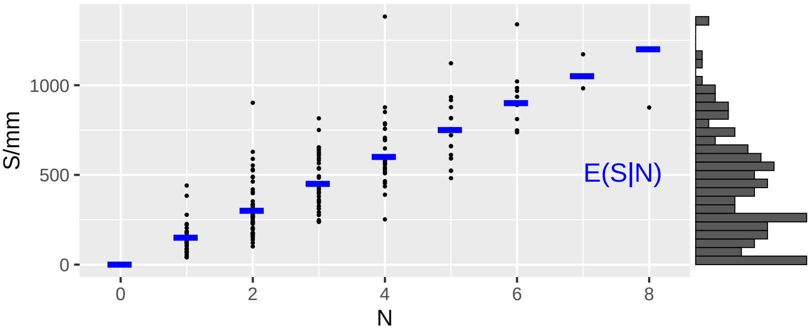


北京 8 月降雨量期望的计算

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)]$$

- 条件分布已知时，计算期望更容易。设 $R_i(0 \le i \le N)$ 的期望是 $\mathrm{E}(R)$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i)\right] = \mathrm{E}[N \cdot \mathrm{E}(R)] = \underbrace{\mathrm{E}(N)}_{\text{平均下雨次数}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}(R)}_{\text{每场雨的平均降雨量}}$$

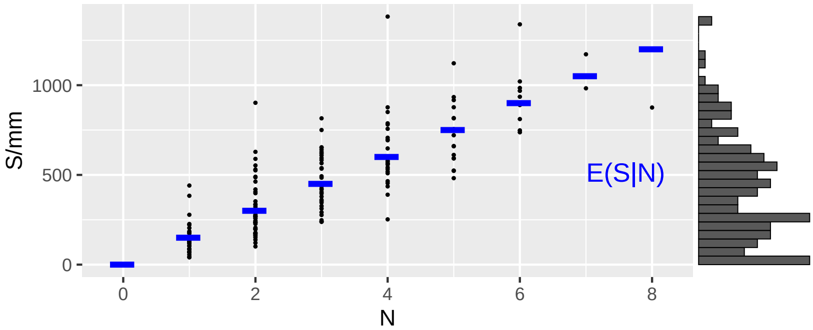


北京 8 月降雨量期望的计算

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)]$$

- 条件分布已知时，计算期望更容易。设 $R_i (0 \le i \le N)$ 的期望是 $\mathrm{E}(R)$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i)\right] = \mathrm{E}[N \cdot \mathrm{E}(R)] = \underbrace{\mathrm{E}(N)}_{\text{平均下雨次数}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}(R)}_{\text{每场雨的平均降雨量}}$$

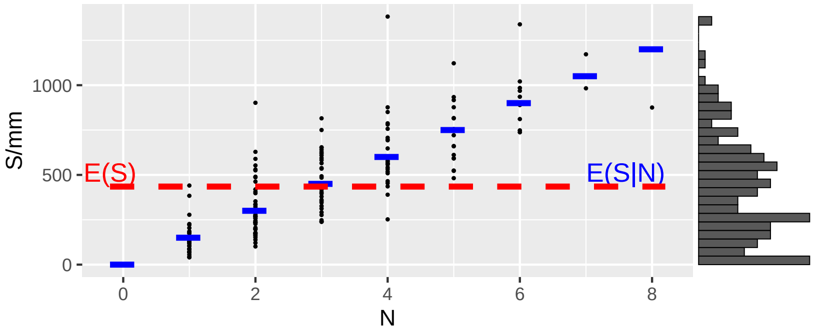


北京 8 月降雨量期望的计算

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)]$$

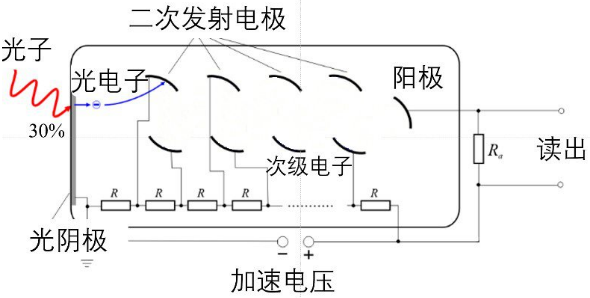
- 条件分布已知时，计算期望更容易。设 $R_i (0 \le i \le N)$ 的期望是 $\mathrm{E}(R)$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(R_i)\right] = \mathrm{E}[N \cdot \mathrm{E}(R)] = \underbrace{\mathrm{E}(N)}_{\text{平均下雨次数}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}(R)}_{\text{每场雨的平均降雨量}}$$



光电倍增管（Photo-Multiplier Tube, PMT）

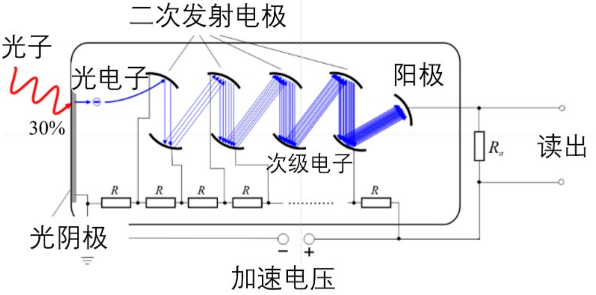
光电倍增管是检测极微弱光的器件，在辐射测量、医学影像等领域应用广泛。



固定地区的天气	固定光强下的 PMT 电荷输出
总降雨量 $S = \sum_{i=1}^{N} R_i$	总电荷量 $Y = \sum_{i=1}^{N} Q_i$
降雨次数 N	光子数 N
各场雨的降雨量 R_i	各个光子诱导的电荷量 Q_i

光电倍增管（Photo-Multiplier Tube, PMT）

光电倍增管是检测极微弱光的器件，在辐射测量、医学影像等领域应用广泛。



固定地区的天气	固定光强下的 PMT 电荷输出
总降雨量 $S = \sum_{i=1}^{N} R_i$	总电荷量 $Y = \sum_{i=1}^{N} Q_i$
降雨次数 N	光子数 N
各场雨的降雨量 R_i	各个光子诱导的电荷量 Q_i

解：光电倍增管

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|N)] = \mathrm{E}[N\,\mathrm{E}(Q)] = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(Q)$$

- 总电荷 Y 的期望，为光电子数 N 与单个光电子电荷量 Q 期望的乘积；

解：光电倍增管

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|N)] = \mathrm{E}[N\,\mathrm{E}(Q)] = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(Q)$$

- 总电荷 Y 的期望，为光电子数 N 与单个光电子电荷量 Q 期望的乘积；

解：光电倍增管

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|N)] = \mathrm{E}[N\,\mathrm{E}(Q)] = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(Q)$$

- 总电荷 Y 的期望，为光电子数 N 与单个光电子电荷量 Q 期望的乘积；

解：光电倍增管

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|N)] = \mathrm{E}[N\,\mathrm{E}(Q)] = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(Q)$$

- 总电荷 Y 的期望，为光电子数 N 与单个光电子电荷量 Q 期望的乘积；

其它特征数

定义：原点矩和中心矩

设 X 为随机变量，k 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k)$$

为 X 的 k 阶 原点矩 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\}$$

为 X 的 k 阶 中心矩 。1 阶原点矩为数学期望，2 阶中心矩为方差。
中心矩与原点矩的关系：

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\} = \mathrm{E}[(X - \mu_1)^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu_1)^{k-i}$$

定义：原点矩和中心矩

设 X 为随机变量，k 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k)$$

为 X 的 k 阶 原点矩 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\}$$

为 X 的 k 阶 中心矩 。1 阶原点矩为数学期望，2 阶中心矩为方差。
中心矩与原点矩的关系：

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\} = \mathrm{E}[(X - \mu_1)^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu_1)^{k-i}$$

定义：原点矩和中心矩

设 X 为随机变量，k 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k)$$

为 X 的 k 阶 原点矩 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\}$$

为 X 的 k 阶 中心矩 。1 阶原点矩为数学期望，2 阶中心矩为方差。
中心矩与原点矩的关系：

$$\nu_k = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k\} = \mathrm{E}[(X - \mu_1)^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i (-\mu_1)^{k-i}$$

混合矩

设 X, Y 为随机变量，k, l 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_{kl} = \mathrm{E}(X^k Y^l)$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 混合原点矩 ，简称 混合矩 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^k (Y - \mathrm{E}(Y))^l]$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 混合中心矩 。1+1 阶混合中心矩为 X, Y 的协方差。

混合矩

设 X, Y 为随机变量，k, l 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_{kl} = \mathrm{E}(X^k Y^l)$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 **混合原点矩** ，简称 **混合矩** 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^k (Y - \mathrm{E}(Y))^l]$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 **混合中心矩** 。1+1 阶混合中心矩为 X, Y 的协方差。

混合矩

设 X, Y 为随机变量，k, l 为正整数。若以下数学期望均存在，则称

$$\mu_{kl} = \mathrm{E}(X^k Y^l)$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 混合原点矩 ，简称 混合矩 。称

$$\nu_k = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^k (Y - \mathrm{E}(Y))^l]$$

为 (X, Y) 的 $k+l$ 阶 混合中心矩 。1+1 阶混合中心矩为 X, Y 的协方差。

变异系数

设 X 为随机变量，且方差存在。称

$$C_V = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\mathrm{E}(X)}$$

为 X 的变异系数。

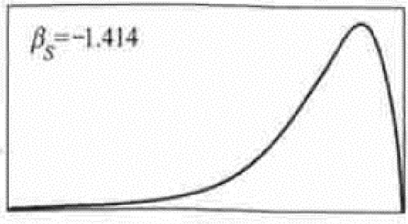
- 变异系数 C_V 是无量纲量，用于比较量纲不同的随机变量的波动大小。
- 可理解为“相对标准差”。

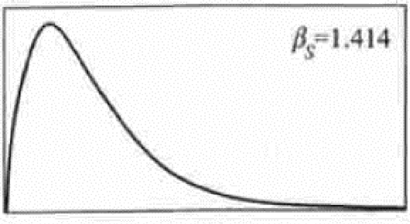
偏度系数 skewness

设随机变量 X 的前三阶矩存在，则比值

$$\beta_S = \frac{\nu_3}{\nu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^3]}{[\mathrm{Var}(X)]^{\frac{3}{2}}}$$

称为 X 的偏度系数，简称偏度。$\beta_S > 0$ 称该分布为正偏或右偏；$\beta_S < 0$ 称该分布为负偏或左偏。β_S 描述分布偏离对称性的程度。



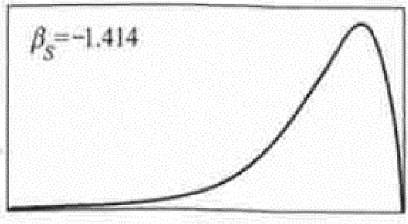


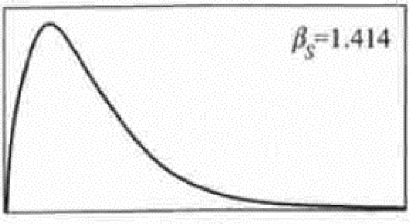
偏度系数 skewness

设随机变量 X 的前三阶矩存在，则比值

$$\beta_S = \frac{\nu_3}{\nu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^3]}{[\mathrm{Var}(X)]^{\frac{3}{2}}}$$

称为 X 的偏度系数，简称偏度。$\beta_S > 0$ 称该分布为正偏或右偏；$\beta_S < 0$ 称该分布为负偏或左偏。β_S 描述分布偏离对称性的程度。





峰度系数 kurtosis

设随机变量 X 的前四阶矩存在，则

$$\beta_k = \frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 3 = \frac{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^4]}{[\mathrm{Var}(X)]^2} - 3$$

称为 X 的 峰度系数 ，简称 峰度 。
峰度描述分布的尖峭程度或尾部粗细程度，正态分布 $\beta_k = 0$。