二维随机变量函数的分布

续本达

清华大学 工程物理系

2023-10-16 清华

复习

二维随机变量

定义

随机试验 E 的样本空间是 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，则向量 (X,Y) 称为 二维随机变量 。

联合分布、条件分布与边缘分布

乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

离散型随机变量 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)$

连续型随机变量 $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x|y)\mathrm{d}xf(y)\mathrm{d}y$

二维随机变量

定义

随机试验 E 的样本空间是 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，则向量 (X,Y) 称为 二维随机变量 。

联合分布、条件分布与边缘分布

乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

离散型随机变量 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)$

连续型随机变量 $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x|y)\mathrm{d}xf(y)\mathrm{d}y$

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x, y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立。

离散型的等价命题

$$\forall i, j (p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x, y [f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

离散型的等价命题

$$\forall i,j(p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x,y[f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

离散型的等价命题

$$\forall i,j(p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x,y[f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

二维正态分布

两个正态随机变量的联合分布

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立

$$\implies f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

$$\implies f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

定义 (二维正态分布)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

具有以上概率密度函数的分布称为二维正态分布。

两个正态随机变量的联合分布

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

定义 (二维正态分布)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

具有以上概率密度函数的分布称为二维正态分布。

两个正态随机变量的联合分布

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

定义 (二维正态分布)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

具有以上概率密度函数的分布称为二维正态分布。

两个正态随机变量的联合分布

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

定义 (二维正态分布)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

具有以上概率密度函数的分布称为二维正态分布。

$\rho = 0$ 的二维正态分布

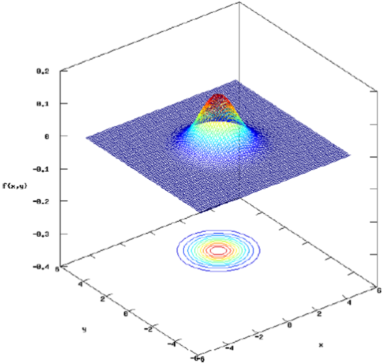
$$(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$$

X 与 Y 相互独立等价于 $\rho = 0$。如果 $\rho = 0$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

$$= f_X(x) f_Y(y)$$



反之，如果 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，取 $x = \mu_1, y = \mu_2$ 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = 1 \implies \rho = 0$$

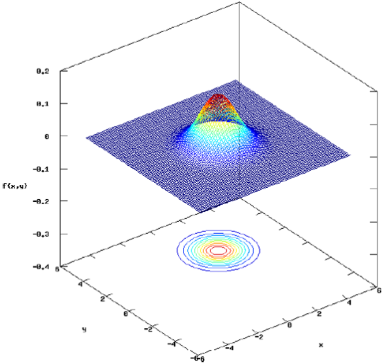
$\rho=0$ 的二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$$

X 与 Y 相互独立等价于 $\rho=0$。如果

$\rho=0$

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \\
&= f_X(x) f_Y(y)
\end{aligned}$$



反之，如果 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，取 $x=\mu_1, y=\mu_2$ 则

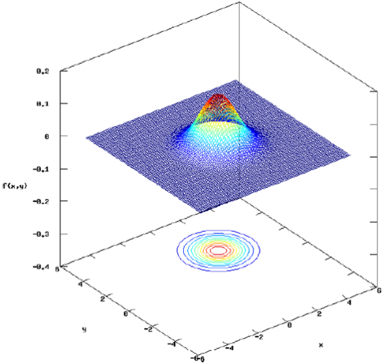
$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}=1 \implies \rho=0$$

$\rho = 0$ 的二维正态分布

$$(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$$

X 与 Y 相互独立等价于 $\rho = 0$。如果 $\rho = 0$

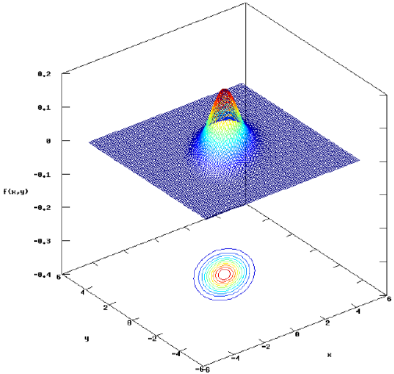
$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \\ =& f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$



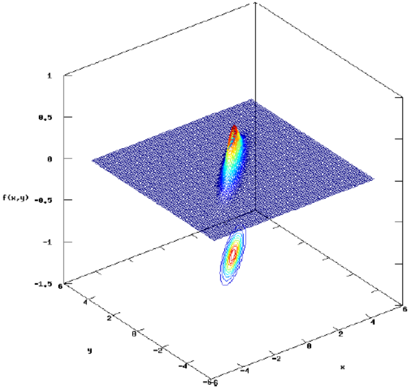
反之，如果 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$，取 $x = \mu_1, y = \mu_2$ 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = 1 \implies \rho = 0$$

$\rho \neq 0$ 的情形



$\rho = 0.5$

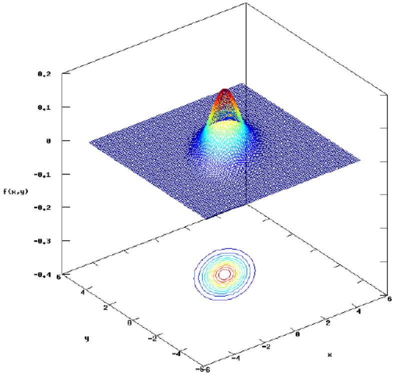


$\rho = 0.95$

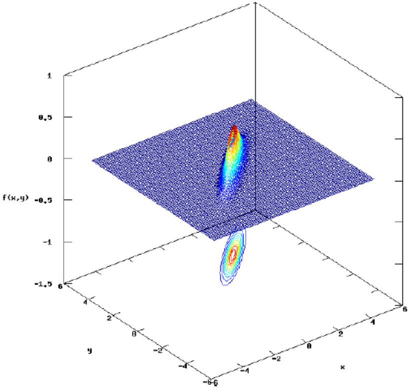
思考：答对者总评 +2%

$\rho \to 1$ 时，$N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 会变成什么分布?

$\rho \neq 0$ 的情形



$\boldsymbol{\rho = 0.5}$



$\boldsymbol{\rho = 0.95}$

思考：答对者总评 +2%

$\rho \to 1$ 时，$N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 会变成什么分布?

多维伽马调研作业（可选）至多 15% 总评加分

二维正态分布是最常用的多维随机变量分布。其它的多维分布例如多维伽马分布， multivariate gamma distribution。

$$f(\vec{z}) = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\alpha}|\vec{z}|^{\alpha-1/2(p+1)}}{\beta^{p\alpha}\Gamma_p(\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{\beta}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\vec{z}\right]$$

伽马分布适用于正实数的随机变量。

调研任务

1. 自行寻找相关的教材或论文，可以请教老师和助教。
2. 调研文献中各类型的多维伽马分布定义，阐释其联系与区别。
3. 调研多维伽马分布中参数的含义。
4. 调研多维伽马分布的应用实例。
5. 学习使用 LaTeX 书写。

多维伽马调研作业（可选）至多 15% 总评加分

二维正态分布是最常用的多维随机变量分布。其它的多维分布例如多维伽马分布， multivariate gamma distribution。

$$f(\vec{z}) = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\alpha}|\vec{z}|^{\alpha-1/2(p+1)}}{\beta^{p\alpha}\Gamma_p(\alpha)} \exp\left[-\frac{1}{\beta}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}\vec{z}\right]$$

伽马分布适用于正实数的随机变量。

调研任务

1. 自行寻找相关的教材或论文，可以请教老师和助教。
2. 调研文献中各类型的多维伽马分布定义，阐释其联系与区别。
3. 调研多维伽马分布中参数的含义。
4. 调研多维伽马分布的应用实例。
5. 学习使用 LaTeX 书写。

随机变量函数的分布

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

一般情形

如果函数 $u=g_1(x,y)$ 和 $v=g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v) = f\left[x(u,v), y(u,v)\right] |J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$。

一般情形

如果函数 $u=g_1(x,y)$ 和 $v=g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v) = f\left[x(u,v), y(u,v)\right] |J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$。

一般情形

如果函数 $u=g_1(x,y)$ 和 $v=g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v) = f\left[x(u,v), y(u,v)\right]|J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$。

例：极坐标

例

假设 x 和 y 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。试证明变换为极坐标 (ρ,ϕ) 后，(ρ,ϕ) 仍为相互独立的随机变量。其中

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, & \rho > 0 \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & \phi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

求 (ρ,ϕ) 的概率密度函数。

有 $x=\rho\cos\phi$ 和 $y=\rho\sin\phi$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho$$

例：极坐标

例

假设 x 和 y 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。试证明变换为极坐标 (ρ,ϕ) 后，(ρ,ϕ) 仍为相互独立的随机变量。其中

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}, & \rho > 0 \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & \phi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

求 (ρ,ϕ) 的概率密度函数。

有 $x = \rho\cos\phi$ 和 $y = \rho\sin\phi$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} = \rho$$

二维正维分布到极坐标

$$
\begin{aligned}
f(\rho,\phi) =& f[x(\rho,\phi), y(\rho,\phi)]|J| \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\sin\phi)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\cos\phi)^2}{2}} \cdot \rho \\
=& \frac{1}{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2}, \rho \ge 0
\end{aligned}
$$

是关于 ρ 的 瑞利分布

- 联合密度函数与 ϕ 无关，根据随机变量相互独立的定义，ρ 与 ϕ 相互独立。
- ϕ 的边缘分布是均匀分布。

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \phi \in [0, 2\pi]$$

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y)，联合密度函数函数为 $f(x,y)$。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y)，联合密度函数函数为 $f(x,y)$。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y)，联合密度函数函数为 $f(x,y)$。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y) ，联合密度函数函数为 $f(x,y)$ 。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

$X + Y$

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，设它们的边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

这称为 f_X 和 f_Y 的 傅立叶卷积公式 ，记为 $f_X * f_Y$。

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，设它们的边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

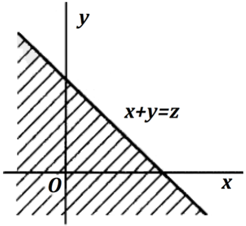
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

这称为 f_X 和 f_Y 的 傅立叶卷积公式 ，记为 $f_X * f_Y$。

证明

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域是 xy 平面上直线 $x+y=z$ 左下方的半平面。给定 z 和 y 时 x 的积分限为 $(-\infty, z-y)$。



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

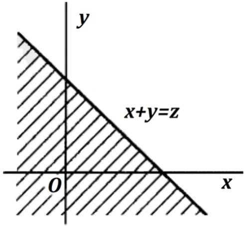
变量替换 $x=u-y$，对 x 的积分变为

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u$$

证明

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint_{x+y \le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域是 xy 平面上直线 $x+y=z$ 左下方的半平面。给定 z 和 y 时 x 的积分限为 $(-\infty, z-y)$。



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

变量替换 $x=u-y$，对 x 的积分变为

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u$$

证明 $X+Y$

于是

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$$

$$\Longrightarrow f_{X+Y}(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

证明 $X+Y$

于是

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f_{X+Y}(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \\
= & \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
= & \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) =& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

更多的高斯不变现象

1. 若 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
   - 如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 那么 $X+Y$ 服从什么分布?
2. 边缘分布：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

3. 条件分布：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，

$$X|Y\sim N\left(\mu_1-(Y-\mu_2)\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2},(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

$$Y|X\sim N\left(\mu_2-(X-\mu_1)\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1},(1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

更多的高斯不变现象

1. 若 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
   - 如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 那么 $X+Y$ 服从什么分布?
2. 边缘分布：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

3. 条件分布：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，

$$X|Y\sim N\left(\mu_1-(Y-\mu_2)\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2},(1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

$$Y|X\sim N\left(\mu_2-(X-\mu_1)\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1},(1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

更多的高斯不变现象

1. 若 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
   - 如果 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 那么 $X + Y$ 服从什么分布?
2. 边缘分布：若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

3. 条件分布：若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$，

$$X|Y \sim N\left(\mu_1 - (Y - \mu_2)\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, (1 - \rho^2)\sigma_1^2\right)$$

$$Y|X \sim N\left(\mu_2 - (X - \mu_1)\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, (1 - \rho^2)\sigma_2^2\right)$$

更多的高斯不变现象

1. 若 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
   - 如果 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 那么 $X + Y$ 服从什么分布?
2. 边缘分布：若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

3. 条件分布：若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$，

$$X|Y \sim N\left(\mu_1 - (Y - \mu_2)\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, (1 - \rho^2)\sigma_1^2\right)$$

$$Y|X \sim N\left(\mu_2 - (X - \mu_1)\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, (1 - \rho^2)\sigma_2^2\right)$$

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。一般地:

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1,\lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2,\lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。一般地:

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1,\lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2,\lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) = & \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ = & \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ = & \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。一般地：

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1,\lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2,\lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

$Y/X, XY$

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $\frac{Y}{X}$ 和 XY 仍为连续型随机变量，概率密度为

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz)\mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz)\mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

第二个公式称为 f_X 和 f_Y 的梅林 (Mellin) 卷积公式。

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $\frac{Y}{X}$ 和 XY 仍为连续型随机变量，概率密度为

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

第二个公式称为 f_X 和 f_Y 的梅林 (Mellin) 卷积公式。

证明：图解积分区间法

- 见教材的详细推导。

证明：增补变量法

$$Z = \frac{Y}{X}, V = X$$

那么 $x = v, y = zv$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -x$$

所以

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) \mathrm{d}x$$

同理

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} (-1) \frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$f_{\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(xz)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{z^2+1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1}e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2}\Big|_{x^2=0}^{+\infty}=\frac{1}{\pi(z^2+1)}$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^2, F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)<z)=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P(\min(X,Y)<z)=1-P(\min(X,Y)>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^2, F_{\min}(z) = 1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z) = P(\max(X,Y) < z) = P(X<z)P(Y<z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z) = P(\min(X,Y) < z) = 1 - P(\min(X,Y) > z)$$
$$= 1 - P(X>z)P(Y>z) = 1 - [1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^2, F_{\min}(z) = 1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z) = P(\max(X,Y) < z) = P(X < z)P(Y < z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z) = P(\min(X,Y) < z) = 1 - P(\min(X,Y) > z)$$
$$=1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^2, F_{\min}(z) = 1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z) = P(\max(X,Y) < z) = P(X < z)P(Y < z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z) = P(\min(X,Y) < z) = 1 - P(\min(X,Y) > z)$$
$$=1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$$

，只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$$

，只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$$

，只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

思考

从你进入教室到答疑结束的总时间 S 服从什么分布?

$$T \sim \mathrm{Exp}(2\lambda), T_0 \sim Exp(\lambda)$$

$T + T_0$ 服从什么分布?

思考

从你进入教室到答疑结束的总时间 S 服从什么分布?

$$T \sim \mathrm{Exp}(2\lambda), T_0 \sim Exp(\lambda)$$

$T+T_0$ 服从什么分布?