二维随机变量

续本达

清华大学 工程物理系

2023-10-11 清华

复习

随机变量

- 伽玛、卡方、贝塔、柯西分布
- 重点关注随机变量之间的转换关系：
  1. 谁是谁的特例?
  2. 谁是谁的极限形式?

随机变量的函数分布

设 $x = h(y)$ 且 $h'(y) > 0$ ，那么

$$\mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}F[h(y)]$$

- 分布函数比分布律和概率密度更本质，变量替换更自然；
- 统一所有随机变量：离散型、连续型、其它型。

随机变量

- 伽玛、卡方、贝塔、柯西分布
- 重点关注随机变量之间的转换关系：
  1. 谁是谁的特例?
  2. 谁是谁的极限形式?

随机变量的函数分布

设 $x = h(y)$ 且 $h'(y) > 0$ ，那么

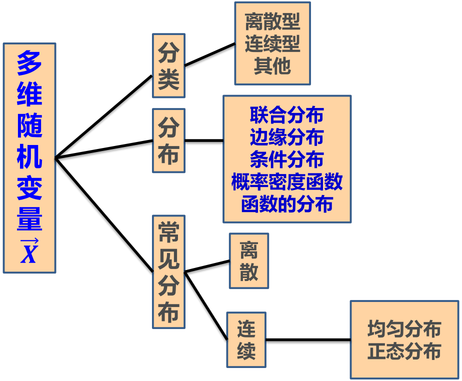
$$\mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}F[h(y)]$$

- 分布函数比分布律和概率密度更本质，变量替换更自然；
- 统一所有随机变量：离散型、连续型、其它型。

二维随机变量

引子

实际问题往往包括很多因素。随机试验的结果需要同时用多个以上的随机变量描述。

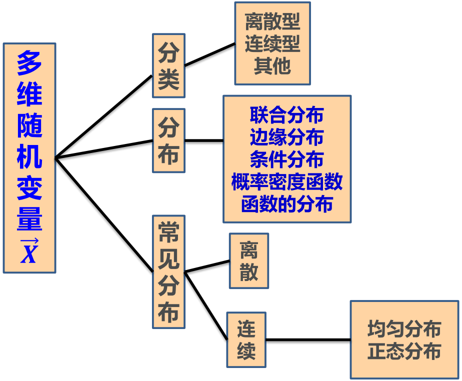


例 (看到一位随机的人 e)

他有各种特征，身高 (e)、体重 (e)。

引子

实际问题往往包括很多因素。随机试验的结果需要同时用多个以上的随机变量描述。



例 (看到一位随机的人 e)

他有各种特征，身高 (e)、体重 (e)。

定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，称为 二维随机变量 或 二维随机向量。

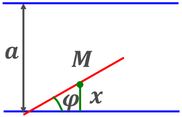
注意

两个随机变量 X 和 Y 的定义域在同一个样本空间上。

中微子观测的例子

$$\begin{aligned} e &\mapsto t \text{ 粒子的时间} \\ e &\mapsto \vec{r} \text{ 粒子的位置} \\ e &\mapsto E \text{ 粒子的能量} \end{aligned}$$

投针问题



$e \mapsto x$

$e \mapsto \phi$

定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，称为 二维随机变量 或二维随机向量。

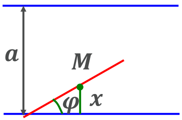
注意

两个随机变量 X 和 Y 的定义域在同一个样本空间上。

中微子观测的例子

$$
\begin{aligned}
e &\mapsto t \text{ 粒子的时间}\\
e &\mapsto \vec{r} \text{ 粒子的位置}\\
e &\mapsto E \text{ 粒子的能量}
\end{aligned}
$$

投针问题



$e \mapsto x$

$e \mapsto \phi$

定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，称为 二维随机变量 或二维随机向量。

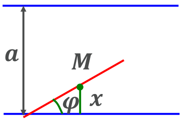
注意

两个随机变量 X 和 Y 的定义域在同一个样本空间上。

中微子观测的例子

$$
\begin{aligned}
e &\mapsto t \text{ 粒子的时间} \\
e &\mapsto \vec{r} \text{ 粒子的位置} \\
e &\mapsto E \text{ 粒子的能量}
\end{aligned}
$$

投针问题



$$e \mapsto x$$

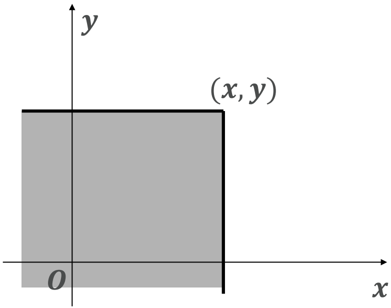
$$e \mapsto \phi$$

分布函数

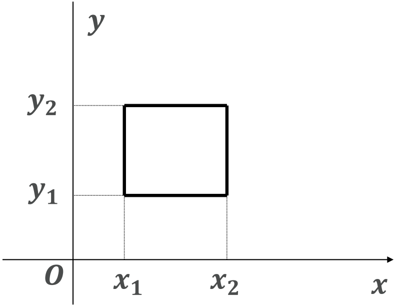
设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x,y，二元函数：

$$F(x,y) = P[(X \le x) \cap (Y \le y)] = P(X \le x, Y \le y)$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的 分布函数 ，或称为随机变量 X,Y 的联合分布函数。



概率计算



$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

性质

1. $F(x,y)$ 是 x 和 y 的不减函数。即
   - 对于任意固定的 y，$x_2 > x_1 \to F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$；
   - 对于任意固定的 x，$y_2 > y_1 \to F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$。
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$
3. 边界条件

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$$

4. $F(x,y)$ 关于 x 和 y 都右连续。
5. 对于任意的 x_1, y_1, x_2, y_2

$$x_1 < x_2, y_1 < y_2 \to F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geq 0$$

性质

1. $F(x,y)$ 是 x 和 y 的不减函数。即
   - 对于任意固定的 y，$x_2 > x_1 \to F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$；
   - 对于任意固定的 x，$y_2 > y_1 \to F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$。
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$
3. 边界条件

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$$

4. $F(x,y)$ 关于 x 和 y 都右连续。
5. 对于任意的 x_1, y_1, x_2, y_2

$$x_1 < x_2, y_1 < y_2 \to F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geq 0$$

性质

1. $F(x,y)$ 是 x 和 y 的不减函数。即
   - 对于任意固定的 y，$x_2 > x_1 \to F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$；
   - 对于任意固定的 x，$y_2 > y_1 \to F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$。
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$
3. 边界条件

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0, \lim_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$$

4. $F(x,y)$ 关于 x 和 y 都右连续。
5. 对于任意的 x_1, y_1, x_2, y_2

$$x_1 < x_2, y_1 < y_2 \to F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geq 0$$

二维离散型随机变量

定义

若二维随机变量 (X, Y) 所有可能的取值为有限多个或可列无穷多个，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

要描述二维离散型随机变量的特性及其与分量之间的关系常用 联合分布律 。

联合分布律

设 (X, Y) 的所有可能的取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$，则称 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量 (X, Y) 的 联合分布律 也简称 分布律 。

$$p_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

定义

若二维随机变量 (X, Y) 所有可能的取值为有限多个或可列无穷多个，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量。
要描述二维离散型随机变量的特性及其与分量之间的关系常用 联合分布律 。

联合分布律

设 (X, Y) 的所有可能的取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$，则称 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量 (X, Y) 的 联合分布律 也简称 分布律 。

$$p_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

联合分布函数

根据一般的联合分布函数定义，已知联合分布律可以求出其联合分布函数

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

反之，由分布函数也可求出其联合分布律

$$P(X = x_i, Y = y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_i, y_j - 0) - F(x_i - 0, y_j) + F(x_i - 0, y_j - 0)$$

二维连续型随机变量

定义

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 若存在非负可积函数 $f(x, y)$, 使得对于任意实数 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量，$f(x, y)$ 为 (x, y) 的 **联合概率密度** 。

性质

1. $f(x,y) \geq 0$；
2. $\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$；
3. 在 $F(x,y)$ 连续点，有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$;
4. 在矩形区域 $(a<x<b, c<y<d)$ 上，有

$$P(a<X<b, c<Y<d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在任意平面域 G 上，(X,Y) 取值的概率

$$P[(X,Y)\in G] = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质

1. $f(x,y) \geq 0$；
2. $\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$；
3. 在 $F(x,y)$ 连续点，有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$;
4. 在矩形区域 $(a < x < b, c < y < d)$ 上，有

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在任意平面域 G 上，(X,Y) 取值的概率

$$P[(X,Y) \in G] = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质

1. $f(x,y) \geq 0$；
2. $\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$；
3. 在 $F(x,y)$ 连续点，有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$;
4. 在矩形区域 $(a<x<b, c<y<d)$ 上，有

$$P(a<X<b, c<Y<d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在任意平面域 G 上，(X,Y) 取值的概率

$$P[(X,Y)\in G] = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

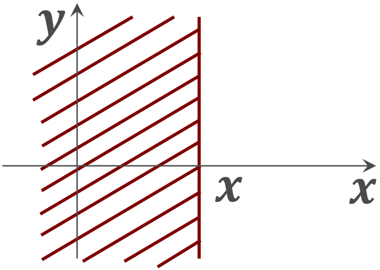
边缘分布

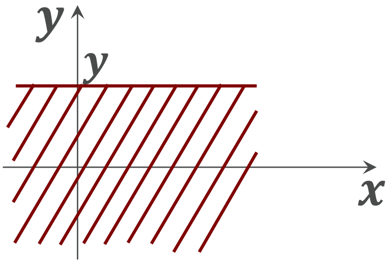
定义

X, Y 各自的（一维）分布函数称为 边缘分布函数 ：

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$$





边缘分布函数（一维），可由联合分布函数（二维）得到。

例

例

设 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\left(C + \tan^{-1}\frac{y}{2}\right), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

其中 A, B, C 为常数。
试确定 A, B, C，求 X 和 Y 的边缘分布函数，求 $P(X > 2)$。

$$\left.\begin{array}{l} F(+\infty,+\infty) = A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) = 1 \\ F(-\infty,+\infty) = A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) = 0 \\ F(+\infty,-\infty) = A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{1}{\pi^2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$$

例

例

设 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\left(C + \tan^{-1}\frac{y}{2}\right), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

其中 A, B, C 为常数。
试确定 A, B, C，求 X 和 Y 的边缘分布函数，求 $P(X > 2)$。

$$\left.\begin{array}{l} F(+\infty,+\infty) = A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) = 1 \\ F(-\infty,+\infty) = A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}) = 0 \\ F(+\infty,-\infty) = A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{1}{\pi^2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$$

例解

- X 的边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

- Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{2}$$

- $P(X > 2) = 1 - F(X \leq 2) = \frac{1}{4}$
- X, Y 能否定义“独立”？

例解

- X 的边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

- Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{2}$$

- $P(X > 2) = 1 - F(X \leq 2) = \frac{1}{4}$
- X, Y 能否定义“独立”？

相互独立的随机变量

定义

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数。若对于所有 x,y 有

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{2}\right)}_{X\text{部分}}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{y}{2}\right)}_{Y\text{部分}}$$

相互独立在分布函数上对应于“可分离变量”。

相互独立的随机变量

定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数。若对于所有 x, y 有

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{2} \right)}_{X\text{部分}} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{y}{2} \right)}_{Y\text{部分}}$$

相互独立在分布函数上对应于“可分离变量”。

二维离散随机变量的边缘分布律

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} =: p_{i\cdot}, i = 1, 2, \cdots$$

$$P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} =: p_{\cdot j}, j = 1, 2, \cdots$$

	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

二维连续型随机变量的边缘概率密度

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv \\
&= \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv
\end{aligned}
$$

由联合分布可确定边缘分布。

X, Y 的边缘分布不能确定联合分布，除非 X 与 Y 相互独立。

二维连续型随机变量的边缘概率密度

$$
\begin{aligned}
F_X(x) = & \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv \right] du \\
= & \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\
F_Y(y) = & \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du \right] dv \\
= & \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv
\end{aligned}
$$

由联合分布可确定边缘分布。

X, Y 的边缘分布不能确定联合分布，除非 X 与 Y 相互独立。

二维连续型随机变量的边缘概率密度

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right] dv \\
&= \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv
\end{aligned}
$$

由联合分布可确定边缘分布。

X, Y 的边缘分布不能确定联合分布，除非 X 与 Y 相互独立。

例：不相互独立二维分布的复杂性

例

设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 k 为常数. 求联合分布函数 $F(x,y)$。

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \vee y<0 \\ y^4, & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 2x^2y^2-x^4, & 0\le x<1, x\le y<1 \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ y^4, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

例：不相互独立二维分布的复杂性

例

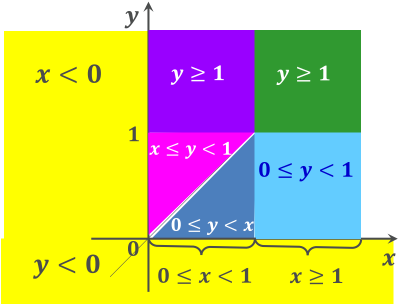
设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 k 为常数. 求联合分布函数 $F(x,y)$。

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\vee y<0 \\ y^4, & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 2x^2y^2-x^4, & 0\le x<1, x\le y<1 \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1, y\ge 1 \\ y^4, & x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$

例：可怕的二维复杂性

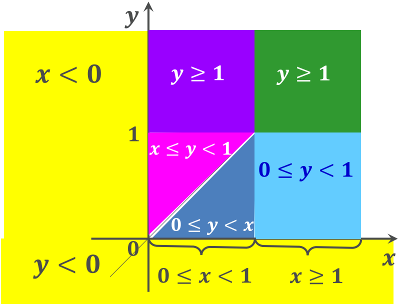


- 对于二维随机变量，联合概率密度显得更简洁

边缘分布

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x^2 - x^4, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

例：可怕的二维复杂性



- 对于二维随机变量，联合概率密度显得更简洁

边缘分布

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x^2 - x^4, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

例：乘法原理

中微子探测

设在到达探测器时的中微子的能谱是 $f_E(E)$，时间为 $[0,1]$ s 上的均匀分布。

- 时间与能量相互独立，$f(E,t) = f_E(E)f_t(t)$
  - 联合概率密度是边缘概率密度的乘积，由边缘分布确定联合分布。
- 联合分布函数

$$
\begin{aligned}
F(E,t) &= \int_0^E \left[\int_0^t f(E',t')\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}E' \\
&= \int_0^E f_E(E')\mathrm{d}E' \int_0^t f_t(t')\mathrm{d}t' \\
&= F_E(E)F_t(t)
\end{aligned}
$$

  - 分布函数是边缘分布函数的乘积。

例：乘法原理

中微子探测

设在到达探测器时的中微子的能谱是 $f_E(E)$，时间为 $[0,1]$ s 上的均匀分布。

- 时间与能量相互独立，$f(E,t)=f_E(E)f_t(t)$
  - 联合概率密度是边缘概率密度的乘积，由边缘分布确定联合分布。
- 联合分布函数

$$
\begin{aligned}
F(E,t) &= \int_0^E \left[\int_0^t f(E',t')\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}E' \\
&= \int_0^E f_E(E')\mathrm{d}E' \int_0^t f_t(t')\mathrm{d}t' \\
&= F_E(E)F_t(t)
\end{aligned}
$$

  - 分布函数是边缘分布函数的乘积。

条件分布

离散型引入

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为 p_{ij}，边缘分布律为

$$
\begin{aligned}
p_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \\
p_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}
\end{aligned}
$$

设 $p_{\cdot j} > 0$，考虑在事件 $\{Y = y_j\}$ 已发生的条件下事件 $\{X = x_i\}$ 发生的概率，则

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

称 $\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的 条件分布律 。

离散型引入

设 (X, Y) 是二维离散型随机变量，其分布律为 p_{ij}，边缘分布律为

$$
\begin{aligned}
p_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \\
p_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}
\end{aligned}
$$

设 $p_{\cdot j} > 0$，考虑在事件 $\{Y = y_j\}$ 已发生的条件下事件 $\{X = x_i\}$ 发生的概率，则

$$
P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}
$$

称 $\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的 条件分布律 。

例：泊松-二项分布

例

在一段时间内进入某商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种商品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该商品相互独立。求进入商店的顾客购买该商品的人数 Y 的分布律。

二维随机变量 (X,Y)，已知 X 的泊松边缘分布律

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

和给定 $X=i$ 时 Y 的二项条件分布律

$$P(Y=j|X=i)=\binom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}, j=0,1,2,\cdots,i$$

例：泊松-二项分布

例

在一段时间内进入某商店的顾客人数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，每个顾客购买某种商品的概率为 p，并且各个顾客是否购买该商品相互独立。求进入商店的顾客购买该商品的人数 Y 的分布律。

二维随机变量 (X, Y)，已知 X 的泊松边缘分布律

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

和给定 $X=i$ 时 Y 的二项条件分布律

$$P(Y=j|X=i)=\binom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}, j=0,1,2,\cdots,i$$

例：泊松-二项分布的联合分布

- 联合分布律为

$$
\begin{aligned}
P(Y=j, X=i) &= P(X=i)P(Y=j|X=i) \\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{i!}{j!(i-j)!}p^j(1-p)^{i-j} \\
&= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!(i-j)!}[\lambda(1-p)]^{i-j}
\end{aligned}
$$

例：泊松-二项分布的联合分布

- 联合分布律为

$$
\begin{aligned}
P(Y=j, X=i) &= P(X=i)P(Y=j|X=i) \\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \frac{i!}{j!(i-j)!} p^j (1-p)^{i-j} \\
&= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!(i-j)!} [\lambda(1-p)]^{i-j}
\end{aligned}
$$

例：泊松-二项分布的边缘分布

- Y 的边缘分布律为

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!(i-j)!}[\lambda(1-p)]^{i-j}$$

$$= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-j}}{(i-j)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!}$$

正是参数为 λp 的泊松分布！

例：泊松-二项分布的边缘分布

- Y 的边缘分布律为

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!(i-j)!} [\lambda(1-p)]^{i-j}$$

$$= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-j}}{(i-j)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!}$$

正是参数为 λp 的泊松分布！

例：泊松-二项分布的边缘分布

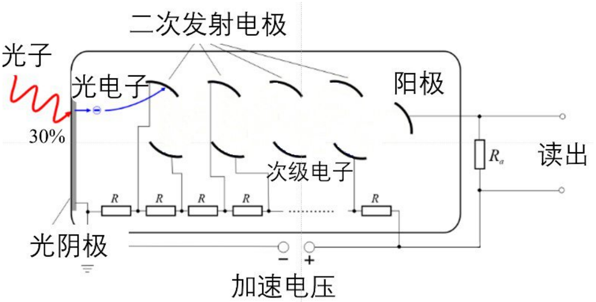
- Y 的边缘分布律为

$$
\begin{aligned}
p_{\cdot j} &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!(i-j)!}[\lambda(1-p)]^{i-j} \\
&= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-j}}{(i-j)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!}
\end{aligned}
$$

正是参数为 λp 的泊松分布！

例：光电倍增管

例

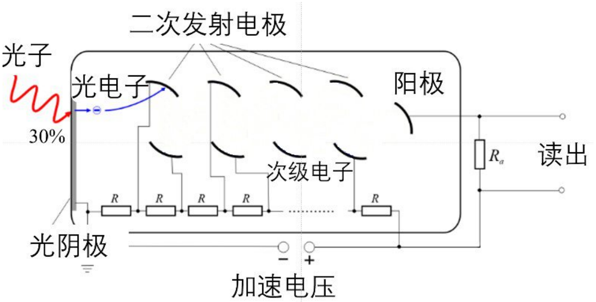


NaI 晶体量能器与光电倍增管（PMT）相连，用 $^{137}\mathrm{Cs}$ 放射源对 NaI 量能器进行该度时，进入 PMT 的 NaI 闪烁光子数服从参数为 λ 的泊松分布。每个击中 PMT 的光子有概率 p 发生光电效应，称为 PMT 的 量子效率 。光电效应产生的光电子个数服从什么分布？

参数为 λp 的泊松分布。

例：光电倍增管

例



NaI 晶体量能器与光电倍增管（PMT）相连，用 $^{137}\mathrm{Cs}$ 放射源对 NaI 量能器进行该度时，进入 PMT 的 NaI 闪烁光子数服从参数为 λ 的泊松分布。每个击中 PMT 的光子有概率 p 发生光电效应，称为 PMT 的 量子效率 。光电效应产生的光电子个数服从什么分布？

参数为 λp 的泊松分布。

光电效应与顾客买货

	商店	光电倍增管
$\pi(\lambda)$	来店顾客数	击中 PMT 光子数
p	每个顾客买商品的概率	量子效率
$\pi(\lambda p)$	购买商品顾客数	产生电子数

连续型条件分布

二维连续型随机变量条件概率密度

设二维连续随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，(X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若对于固定 y，$f_Y(y) > 0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的 **条件概率密度** 。

称

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx$$

为条件分布函数。类似地 $f_X(x) > 0$ 时，可以定义 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $F_{Y|X}(y|x)$ 。

二维连续型随机变量条件概率密度

设二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若对于固定 y，$f_Y(y)>0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y=y$ 条件下 X 的 条件概率密度 。
称

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(x|y)dx$$

为条件分布函数。类似地 $f_X(x)>0$ 时，可以定义 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $F_{Y|X}(y|x)$ 。

二维连续型随机变量条件概率密度

设二维连续随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，(X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$。若对于固定 y，$f_Y(y) > 0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

为在 $Y = y$ 条件下 X 的 条件概率密度 。
称

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx$$

为条件分布函数。类似地 $f_X(x) > 0$ 时，可以定义 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $F_{Y|X}(y|x)$ 。

例：圆盘上的均匀分布

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A，二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布。

例

设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $X^2 + Y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

注意

这个结果说明 X 的概率密度与 Y 的不同取值有关。可以证明不满足随机变量相互独立的条件。

例：圆盘上的均匀分布

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A，二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布。

例

设二维随机变量 (X,Y) 在圆域 $X^2+Y^2\leq 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

注意

这个结果说明 X 的概率密度与 Y 的不同取值有关。可以证明不满足随机变量相互独立的条件。

连续型随机变量的全概率公式

由条件概率的定义得

$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$$

第一式两边对 x 积分求 Y 的边缘密度函数，第二式两边对 y 积分求 X 的边缘密度函数，得全概率公式的密度函数形式：

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dy$$

连续型随机变量的贝叶斯公式

条件概率的定义

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

替换后得贝叶斯公式的密度函数形式：

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_X(x)f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)dx}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)dy}$$

总结

联合、边缘与条件分布

联合分布、边缘分布

离散型

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\quad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\quad j=1,2,\cdots$$

连续型

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\qquad F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

条件分布

离散型

$$P\{X=x_i|Y=y_j)=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

连续型

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$