复习

随机变量的函数分布

柯西分布

卡方分布

二元随机变量函数

$X+Y$

$Y/X, XY$

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

随机变量的函数变换

续本达

清华大学 工程物理系

2024-09-30 清华

复习

二维随机变量

定义

随机试验 E 的样本空间是 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，则向量 (X,Y) 称为 二维随机变量 。

联合分布、条件分布与边缘分布

乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

离散型随机变量 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)$

连续型随机变量 $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x|y)\mathrm{d}xf(y)\mathrm{d}y$

二维随机变量

定义

随机试验 E 的样本空间是 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，则向量 (X,Y) 称为 二维随机变量 。

联合分布、条件分布与边缘分布

乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

离散型随机变量 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)$

连续型随机变量 $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x|y)\mathrm{d}xf(y)\mathrm{d}y$

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

离散型的等价命题

$$\forall i,j(p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x,y[f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

离散型的等价命题

$$\forall i,j(p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x,y[f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

定义：两个随机变量相互独立的唯一判据

设 (X,Y) 为二维随机变量，若对任何实数 x,y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

即 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则称随机变量 X 和 Y 相互独立 。

离散型的等价命题

$$\forall i,j(p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j})$$

连续型的等价命题

$$\forall x,y[f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)]$$

二维随机变量 (X,Y) 相互独立时，边缘分布完全确定联合分布。

随机变量的函数分布

引例

我们常对某些随机变量的函数更感兴趣。例如：

- 在一些试验中，所关心的随机变量往往不能由直接测量得到，而它却是某个能直接测量的随机变量的函数。

例 (直径与面积)

我们测量圆轴截面的直径 D，而关心的却是截面面积 $A=\frac{\pi D^2}{4}$。这里，随机变量 A 是随机变量 D 的函数。我们将讨论如何由已知的随机变量 D 的概率分布去求得它的函数 $Y=g(D)$ 的概率分布。

- $g(\cdot)$ 是已知的连续函数

引例

我们常对某些随机变量的函数更感兴趣。例如：

- 在一些试验中，所关心的随机变量往往不能由直接测量得到，而它却是某个能直接测量的随机变量的函数。

例 (直径与面积)

我们测量圆轴截面的直径 D，而关心的却是截面面积 $A=\frac{\pi D^2}{4}$。这里，随机变量 A 是随机变量 D 的函数。我们将讨论如何由已知的随机变量 D 的概率分布去求得它的函数 $Y=g(D)$ 的概率分布。

- $g(\cdot)$ 是已知的连续函数

离散型随机变量的灵感

若 X 是离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(x)$ 仍为离散型随机变量，其分布律为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

如果有 $g(x_1)=g(x_2)$ 怎么办?

注意

$y_i=g(x_i)$ 有相同值时，要合并为一项，对应的概率相加。

离散型随机变量的灵感

若 X 是离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(x)$ 仍为离散型随机变量，其分布律为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

如果有 $g(x_1)=g(x_2)$ 怎么办?

注意

$y_i=g(x_i)$ 有相同值时，要合并为一项，对应的概率相加。

例：离散型随机变量的函数

例

设随机变量 X 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律。

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

Y 所有可能的值为 $0, 1, 4$

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X=1) &&= 0.1\\
P(Y=1) &= P(X=0)+P(X=2) &&= 0.7\\
P(Y=4) &= P(X=-1) &&= 0.2
\end{aligned}
$$

Y 的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例：离散型随机变量的函数

例

设随机变量 X 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律。

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

Y 所有可能的值为 $0, 1, 4$

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X=1) &&= 0.1\\
P(Y=1) &= P(X=0)+P(X=2) &&= 0.7\\
P(Y=4) &= P(X=-1) &&= 0.2
\end{aligned}
$$

Y 的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

连续型随机变量函数的概率密度定理

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$，$g(x)$ 处处可导且 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$），则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & a < y < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $h(x)$ 为 $g(x)$ 的反函数，$a = \min[g(-\infty), g(\infty)], b = \max[g(-\infty), g(\infty)]$。

微分形式帮助记忆

- 不妨设 $h'(y) > 0$

$$f_X(x)\mathrm{d}x = f_X[h(y)]h'(y)\mathrm{d}y$$
$$\Longrightarrow f_Y(y) = f_X[h(y)]h'(y)$$

连续型随机变量函数的概率密度定理

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$，$g(x)$ 处处可导且 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$），则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & a < y < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $h(x)$ 为 $g(x)$ 的反函数，$a = \min[g(-\infty), g(\infty)], b = \max[g(-\infty), g(\infty)]$。

微分形式帮助记忆

- 不妨设 $h'(y) > 0$

$$f_X(x)\mathrm{d}x = f_X[h(y)]h'(y)\mathrm{d}y$$
$$\Longrightarrow f_Y(y) = f_X[h(y)]h'(y)$$

函数的概率密度定理证明

1. 不妨设 $g'(x), h'(y) > 0$。
2. $a = g(-\infty), b = g(\infty)$，则 $y = g(x)$ 的取值范围为 (a, b)。
3. $y < a$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$
4. $y > b$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$
5. $a \le y \le b$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ =& P(X \le h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx \end{aligned}$$

对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & a < y < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

函数的概率密度定理证明

1. 不妨设 $g'(x), h'(y) > 0$。
2. $a = g(-\infty), b = g(\infty)$，则 $y = g(x)$ 的取值范围为 (a, b)。
3. $y < a$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$
4. $y > b$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$
5. $a \le y \le b$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ =& P(X \le h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx \end{aligned}$$

对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & a < y < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

函数的概率密度定理证明

1. 不妨设 $g'(x), h'(y) > 0$。
2. $a = g(-\infty), b = g(\infty)$，则 $y = g(x)$ 的取值范围为 (a, b)。
3. $y < a$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$
4. $y > b$ 时， $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$
5. $a \le y \le b$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ =& P(X \le h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)dx \end{aligned}$$

对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)| & a < y < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例：连续型随机变量的函数

例

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的概率密度。

- 记 X, Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$。

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(2X + 8 \le y) \\ =& P\left(X \le \frac{y}{2} - 4\right) = F_X\left(\frac{y}{2} - 4\right) \end{aligned}$$

例：连续型随机变量的函数

例

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的概率密度。

- 记 X, Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$。

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(2X + 8 \le y) \\ =& P\left(X \le \frac{y}{2} - 4\right) = F_X\left(\frac{y}{2} - 4\right) \end{aligned}$$

例：连续型随机变量的函数 – 概率密度

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{y/2-4}{8} & 0 < \frac{y}{2}-4 < 4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

例：连续型随机变量的函数 – 概率密度

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{y/2-4}{8} & 0 < \frac{y}{2}-4 < 4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

例：连续型随机变量的函数 – 概率密度

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \frac{1}{2} f_x\left(\frac{y}{2}-4\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{y/2-4}{8} & 0 < \frac{y}{2}-4 < 4, \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

例：正态分布伸缩平移

例

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b (a \neq 0)$ 也服从正态分布。

- 对于 $-\infty < y < \infty$，有

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[(y-b)/a-\mu]^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

因此 $Y \sim N[a\mu + b, (a\sigma)^2]$。

变换

对随机变量 X 的概率密度函数先整体拉伸 a 倍，再平移距离 b。

例：正态分布伸缩平移

例

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b (a \neq 0)$ 也服从正态分布。

- 对于 $-\infty < y < \infty$，有

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[(y-b)/a-\mu]^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

因此 $Y \sim N[a\mu + b, (a\sigma)^2]$。

变换

对随机变量 X 的概率密度函数先整体拉伸 a 倍，再平移距离 b。

例：变成均匀分布

例

若随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 为严格单调增的连续函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在，则随机变量 $Y \equiv F_X(X)$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，即 $Y \sim U(0,1)$。

1. 由于分布函数 $F_X(x)$ 仅在 $[0,1]$ 内取值，所以 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y \geq 1$ 时，$F_Y(y)=1$。
2. 当 $0 \leq y < 1$ 时，
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$
3. 所以 $Y \sim U(0,1)$。

应用

- 可以从 $U(0,1)$ 生成任意连续分布：生成随机数时，只需要实现 $U(0,1)$。

例：变成均匀分布

例

若随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 为严格单调增的连续函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在，则随机变量 $Y \equiv F_X(X)$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，即 $Y \sim U(0,1)$。

1. 由于分布函数 $F_X(x)$ 仅在 $[0,1]$ 内取值，所以 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y \geq 1$ 时，$F_Y(y)=1$。
2. 当 $0 \leq y < 1$ 时，
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$
3. 所以 $Y \sim U(0,1)$。

应用

- 可以从 $U(0,1)$ 生成任意连续分布：生成随机数时，只需要实现 $U(0,1)$。

例：变成均匀分布

例

若随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 为严格单调增的连续函数，其反函数 $F_X^{-1}(y)$ 存在，则随机变量 $Y \equiv F_X(X)$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，即 $Y \sim U(0,1)$。

1. 由于分布函数 $F_X(x)$ 仅在 $[0,1]$ 内取值，所以 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y \geq 1$ 时，$F_Y(y)=1$。
2. 当 $0 \leq y < 1$ 时，
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$
3. 所以 $Y \sim U(0,1)$。

应用

- 可以从 $U(0,1)$ 生成任意连续分布：生成随机数时，只需要实现 $U(0,1)$。

柯西分布

例：柯西分布

例

设随机变量 $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$，求 $Y = \tan X$ 的分布。

- $y = \tan x$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内导函数恒正，取值范围 $(-\infty, \infty)$。
- 逆函数 $x = \tan^{-1} y$ 导函数也恒正，$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1+y^2}$
- Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[\tan^{-1} y](\tan^{-1} y)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$$

服从柯西分布。

例：柯西分布

例

设随机变量 $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$，求 $Y = \tan X$ 的分布。

- $y = \tan x$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内导函数恒正，取值范围 $(-\infty, \infty)$。
- 逆函数 $x = \tan^{-1} y$ 导函数也恒正，$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1+y^2}$
- Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[\tan^{-1} y](\tan^{-1} y)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$$

服从柯西分布。

例：柯西分布

例

设随机变量 $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$，求 $Y = \tan X$ 的分布。

- $y = \tan x$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内导函数恒正，取值范围 $(-\infty, \infty)$。
- 逆函数 $x = \tan^{-1} y$ 导函数也恒正，$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1+y^2}$
- Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = f_X[\tan^{-1} y](\tan^{-1} y)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$$

服从柯西分布。

柯西分布定义

若 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

则称 X 服从柯西分布。

布莱特-魏格纳分布（Breit-Wigner）

粒子物理中柯西分布常称布莱特-魏格纳分布，描述不稳定粒子的质量的分布，形式为

$$f(x; m_0, \Gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x-m_0)^2}, -\infty < x < \infty$$

- m_0 是粒子的质量，Γ 代表能谱（质量谱）的展宽。

柯西分布定义

若 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

则称 X 服从柯西分布。

布莱特-魏格纳分布（Breit-Wigner）

粒子物理中柯西分布常称布莱特-魏格纳分布，描述不稳定粒子的质量的分布，形式为

$$f(x; m_0, \Gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x-m_0)^2}, -\infty < x < \infty$$

- m_0 是粒子的质量，Γ 代表能谱（质量谱）的展宽。

复习

随机变量的函数分布

柯西分布

卡方分布

二元随机变量函数

$X+Y$

$Y/X, XY$

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

卡方分布

例：反函数不存在的情形

例

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

- 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$。
- 由于 $Y = X^2 \geq 0$，所以 $F_Y(y<0) = 0$。当 $y > 0$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ =& P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

- 对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

例：反函数不存在的情形

例

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

- 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$。
- 由于 $Y = X^2 \geq 0$，所以 $F_Y(y<0) = 0$。当 $y > 0$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ =& P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

- 对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

例：反函数不存在的情形

例

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

- 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$。
- 由于 $Y = X^2 \geq 0$，所以 $F_Y(y<0) = 0$。当 $y > 0$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ =& P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

- 对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

例：反函数不存在的情形

例

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

- 分别记 X, Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$。
- 由于 $Y = X^2 \geq 0$，所以 $F_Y(y<0) = 0$。当 $y > 0$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ =& P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

- 对 y 求导得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

从标准正态到卡方分布

若 $X \sim N(0,1)$，则 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

是 $n=1$ 的卡方分布

$$Y \sim \chi^2(1).$$

- 注意 $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ ，但在 广义积分 的意义下，$F(x)$ 有良定义。

定义

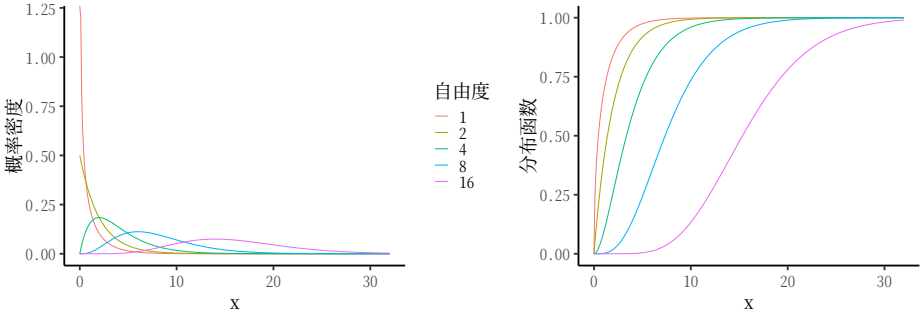
若 n 是整数，$X \sim \mathrm{Ga}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，称 X 服从 卡方分布 ，其概率密度为

$$f(x;n) = \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 0$$

记为

卡方分布自由度参数 n

```
library(patchwork)
x <- seq(0, 32, by=0.1)
chi_ndf <- data.frame(x=c(), pd=c(), n=c())
for (n in c(1,2,4,8,16)) {
    chi_ndf <- rbind(chi_ndf, data.frame(x=x, pd=dchisq(x, df=n), pp=pchisq(x, df=n), n=n))}
chi_ndf$n <- as.factor(chi_ndf$n)
plot <- ggplot(chi_ndf, aes(x=x, color=n))
d0 <- plot + geom_line(aes(y=pd)) + labs(y="概率密度", color="自由度")
d1 <- plot + geom_line(aes(y=pp), show.legend=FALSE) + labs(y="分布函数")
print(d0 + d1)
```



卡方分布的构造

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(0,1)$ ，相互独立，那么

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证明思路：首先证明 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$ ，见本节课“随机变量的函数分布”例子；随后使用伽马分布的可加性，从 $\chi^2(1)$ 加得 $\chi^2(n)$。

卡方分布的构造

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(0,1)$ ，相互独立，那么

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证明思路：首先证明 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$ ，见本节课“随机变量的函数分布”例子；随后使用伽马分布的可加性，从 $\chi^2(1)$ 加得 $\chi^2(n)$。

二元随机变量函数

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

引子

类似一维随机变量的函数，多个随机变量的函数同样重要。

例

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$。求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度。

常见的 $g(X,Y)$ 形式有：$X\pm Y$、Y/X、XY、$\max(X,Y)$、$\min(X,Y)$

任务

已知多个随机变量的分布函数（或概率密度），求多个随机变量的函数的分布函数（或概率密度）。

一般情形

如果函数 $u=g_1(x,y)$ 和 $v=g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U=g_1(X,Y)$ 和 $V=g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v)=f\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$ 。

一般情形

如果函数 $u = g_1(x,y)$ 和 $v = g_2(x,y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U = g_1(X,Y)$ 和 $V = g_2(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u,v) = f\left[x(u,v), y(u,v)\right] |J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$ 。

一般情形

如果函数 $u = g_1(x, y)$ 和 $v = g_2(x, y)$ 存在连续偏导数和唯一的反函数

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

该变换的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则随机变量 $U = g_1(X, Y)$ 和 $V = g_2(X, Y)$ 的联合密度函数为

$$g(u, v) = f\left[x(u, v), y(u, v)\right] |J|$$

行列式与绝对值

行列式与绝对值都写作 $|\cdot|$。

例：极坐标

例

假设 x 和 y 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。试证明变换为极坐标 (ρ,ϕ) 后，(ρ,ϕ) 仍为相互独立的随机变量。其中

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \rho>0$$
$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \phi\in[0,2\pi]$$

求 (ρ,ϕ) 的概率密度函数。

有 $x=\rho\cos\phi$ 和 $y=\rho\sin\phi$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi\end{vmatrix}=\rho$$

例：极坐标

例

假设 x 和 y 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。试证明变换为极坐标 (ρ,ϕ) 后，(ρ,ϕ) 仍为相互独立的随机变量。其中

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \rho>0$$
$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \phi\in[0,2\pi]$$

求 (ρ,ϕ) 的概率密度函数。

有 $x=\rho\cos\phi$ 和 $y=\rho\sin\phi$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi\end{vmatrix}=\rho$$

二维正维分布到极坐标

$$
\begin{aligned}
f(\rho,\phi) =& f[x(\rho,\phi), y(\rho,\phi)]|J| \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\sin\phi)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\cos\phi)^2}{2}} \cdot \rho \\
=& \frac{1}{2\pi} \rho e^{-\rho^2/2}, \rho \geq 0
\end{aligned}
$$

是关于 ρ 的 瑞利分布

- 联合密度函数与 ϕ 无关，根据随机变量相互独立的定义，ρ 与 ϕ 相互独立。
- ϕ 的边缘分布是均匀分布。

$$
f(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \phi \in [0, 2\pi]
$$

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y) ，联合密度函数函数为 $f(x,y)$ 。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y) ，联合密度函数函数为 $f(x,y)$ 。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y) ，联合密度函数函数为 $f(x,y)$ 。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

增补变量法

假设二维随机变量 (X,Y) ，联合密度函数函数为 $f(x,y)$ 。目标是求变量 $U=g(X,Y)$ 的概率密度。

$$(X,Y) \xrightarrow{\text{函数变换}} (g(X,Y),X) \xrightarrow{\text{边缘分布}} g(X,Y)$$

1. 增补新变量 $V=X$ 或 $V=Y$；
2. 用变换法求出 (U,V) 的联合密度函数 $g(u,v)$；
3. 对 $g(u,v)$ 关于 v 积分，得到 U 的边缘密度函数。

复习

随机变量的函数分布

柯西分布

卡方分布

二元随机变量函数

$X+Y$

Y/X, XY

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

$X+Y$

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，设它们的边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

这称为 f_X 和 f_Y 的 傅立叶卷积公式 ，记为 $f_X * f_Y$。

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，设它们的边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

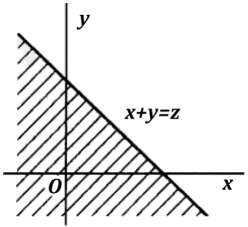
$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

这称为 f_X 和 f_Y 的 傅立叶卷积公式 ，记为 $f_X * f_Y$。

证明

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域是 xy 平面上直线 $x+y=z$ 左下方的半平面。给定 z 和 y 时 x 的积分限为 $(-\infty, z-y)$。



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

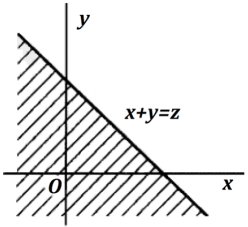
变量替换 $x=u-y$，对 x 的积分变为

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u$$

证明

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域是 xy 平面上直线 $x+y=z$ 左下方的半平面。给定 z 和 y 时 x 的积分限为 $(-\infty, z-y)$。



$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

变量替换 $x=u-y$，对 x 的积分变为

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u$$

证明 $X+Y$

于是

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad f_{X+Y}(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y
$$

证明 $X+Y$

于是

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u \\
\Longrightarrow\ f_{X+Y}(z) &= F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ &= f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ &= f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

微分形式的证明，利用边缘分布

微分形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$$

1. 把 X, Y 的联合分布换元成 Z, Y 的联合分布

$$\begin{aligned} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =& f(z-y,y)\mathrm{d}(z-y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)\mathrm{d}y \\ =& f(z-y,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Z 的边缘分布为

$$f_Z(z)\mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

例：高斯不变

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

X 和 Y 服从标准正态分布，其概率密度分别为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$。

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{z}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}
$$

是 $N(0,2)$ 分布的概率密度。

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。一般地:

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1,\lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2,\lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。 一般地:

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1,\lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2,\lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

例：指数分布

例

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么 $X+Y$ 服从什么分布?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\lambda(z-x)} \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

是 $\mathrm{Ga}(2,\lambda)$ 的概率密度。 一般地：

$$X \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1, \lambda), Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_2, \lambda) \implies X+Y \sim \mathrm{Ga}(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$$

复习

随机变量的函数分布

柯西分布

卡方分布

二元随机变量函数

$X+Y$

$Y/X, XY$

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

$Y/X, XY$

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $\frac{Y}{X}$ 和 XY 仍为连续型随机变量，概率密度为

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

第二个公式称为 f_X 和 f_Y 的梅林 (Mellin) 卷积公式。

证明：图解积分区间法

- 见教材的详细推导。

概述

假设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y), -\infty < x, y < +\infty$，则 $\frac{Y}{X}$ 和 XY 仍为连续型随机变量，概率密度为

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

若 X 和 Y 相互独立，边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则

$$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) \mathrm{d}x, f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \mathrm{d}x$$

第二个公式称为 f_X 和 f_Y 的梅林 (Mellin) 卷积公式。

证明：图解积分区间法

- 见教材的详细推导。

证明：增补变量法

$$Z=\frac{Y}{X}, V=X$$

那么 $x=v, y=zv$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & z \end{vmatrix}=-x$$

所以

$$f_{\frac{Y}{X}}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\mathrm{d}x$$

同理

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2}\Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2}\Big|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

例：高斯翻车变柯西

例

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$ 分布。求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{Y}{X}}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2+(xz)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(-1)\frac{2}{z^2+1} \left. e^{-\frac{z^2+1}{2}x^2} \right|_{x^2=0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}
\end{aligned}
$$

是柯西分布。

$\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^2, F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)<z)=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z)=P(\min(X,Y)<z)=1-P(\min(X,Y)>z)$$
$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^2, F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)<z)=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z)=P(\min(X,Y)<z)=1-P(\min(X,Y)>z)$$
$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^2, F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)<z)=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z)=P(\min(X,Y)<z)=1-P(\min(X,Y)>z)$$
$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

概述

假设 (X,Y) 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布分别为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z), F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

若 (X,Y) 独立同分布，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^2, F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

证明

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)<z)=P(X<z)P(Y<z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z)=P(\min(X,Y)<z)=1-P(\min(X,Y)>z)$$
$$=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda).$$

只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda).$$

只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

例：竞争的指数分布

例

有两名助教在教室中给同学们答疑，每次所花时间 t 服从参数为 λ 的指数分布。你进入教室时，发现恰好有两名同学正在答疑。那么你从进入教室到开始答疑所花时间的分布是什么。

左边的学生再花的时间 T_1，右边的学生再花的时间 T_2。它们独立同分布

$$T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

那么

$$\min(T_1, T_2) \sim \mathrm{Exp}(2\lambda).$$

只要有一位同学答疑结束，你即可答疑开始，所以等待时间分布为 $\mathrm{Exp}(2\lambda)$

思考

从你进入教室到答疑结束的总时间 S 服从什么分布?

$$T \sim \mathrm{Exp}(2\lambda), T_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

$T+T_0$ 服从什么分布?

思考

从你进入教室到答疑结束的总时间 S 服从什么分布?

$$T \sim \mathrm{Exp}(2\lambda), T_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

$T+T_0$ 服从什么分布?