离散型随机变量及其分布

续本达

清华大学 工程物理系

2023-09-27 清华

复习

条件概率

设 A, B 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S。A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立，则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

条件概率

设 A, B 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S。A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立，则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

条件概率

设 A, B 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S。A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

独立事件

若以下式子成立，则事件 A 与 B 相互独立。

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

随机变量的定义

随机变量的概念

问题

在概率的研究中为什么需要引入随机变量?

- 为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要将随机试验的结果量化，从而引入随机变量来描述试验的不同结果。

- 试验的结果可以用一个数 x 来表示， x 随着试验的结果不同而变化，也即它是样本点的一个函数，这种量称为随机变量。

- 例如，电脑的寿命可用一个连续变量 T 表示。；抽取一次彩票可能出现中奖和谢谢惠顾两种结果，可以用离散变量来描述

随机变量的概念

问题

在概率的研究中为什么需要引入随机变量?

- 为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要将随机试验的结果量化，从而引入随机变量来描述试验的不同结果。

- 试验的结果可以用一个数 x 来表示， x 随着试验的结果不同而变化，也即它是样本点的一个函数，这种量称为随机变量。
- 例如，电脑的寿命可用一个连续变量 T 表示。；抽取一次彩票可能出现中奖和谢谢惠顾两种结果，可以用离散变量来描述

随机变量的定义

定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$.
$X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X = X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
  - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

随机变量的定义

定义

设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$.
$X=X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X=X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
  - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

随机变量的定义

定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$.
$X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实单值函数，称 $X = X(e)$ 为**随机变量** (random variable, 略写为 r.v.)。

- 定义了随机变量也就定义了新的样本空间，即随机变量的值域。
- 随机变量往往用大写字母标记，其具体取值则用相应的小写字母表示。
  - 例如，随机变量 X 可以取值 x 。
- 意义：随机现象可方便地用随机变量描述，便于利用数学分析的方法进行深入研究。

随机变量的分类

- 随机变量 $\begin{cases} \text{离散型} \\ \text{非离散型：} \begin{cases} \text{连续型} \\ \text{其他} \end{cases} \end{cases}$
- 离散随机变量：随机变量 X 的可能取值为有限个或可列个。
- 连续随机变量的例子：随机变量 X 的可能取值充满实数轴上一个连续的区间 (a, b)。其中 a 可以为 $-\infty$,b 可以为 $+\infty$.

思路

- 随机变量是将样本空间 S 的样本点映射为单值实数的函数。
  $\Rightarrow$ 样本点可以用实数表示了。
- 概率事件域 $\mathcal{F}$ 到实数的映射。
  $\Rightarrow$ 随机事件发生可能性的大小可以用概率量化了。

随机变量的分类

- 随机变量 $\begin{cases} \text{离散型} \\ \text{非离散型：} \begin{cases} \text{连续型} \\ \text{其他} \end{cases} \end{cases}$
- 离散随机变量：随机变量 X 的可能取值为有限个或可列个。
- 连续随机变量的例子：随机变量 X 的可能取值充满实数轴上一个连续的区间 (a, b)。其中 a 可以为 $-\infty$,b 可以为 $+\infty$.

思路

- 随机变量是将样本空间 S 的样本点映射为单值实数的函数。
  $\Rightarrow$ 样本点可以用实数表示了。
- 概率事件域 $\mathcal{F}$ 到实数的映射。
  $\Rightarrow$ 随机事件发生可能性的大小可以用概率量化了。

要点

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数，定义域为 S，值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。
- 若 X 为随机变量，随机事件可表示为实数轴上的点集，例如：$\X=k\$，$\{a < X \le b\}$, $\cdots$，即

$$a < X \le b := \{e | a < X(e) \le b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}
\{X = k\} &= \{X \le k\} - \{X < k\}, \\
\{X > b\} &= S - \{X \le b\}, \\
\{a < X \le b\} &= \{X \le b\} - \{X \le a\}.
\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量；随机变量的函数一般也是随机变量。

要点

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数，定义域为 S，值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。
- 若 X 为随机变量，随机事件可表示为实数轴上的点集，例如：$\X=k\$，$\{a < X \le b\}$，$···$，即

$$a < X \le b := \{e | a < X(e) \le b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\{X = k\} = \{X \le k\} - \{X < k\},$$
$$\{X > b\} = S - \{X \le b\},$$
$$\{a < X \le b\} = \{X \le b\} - \{X \le a\}.$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量；随机变量的函数一般也是随机变量。

要点

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数，定义域为 S，值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。
- 若 X 为随机变量，随机事件可表示为实数轴上的点集，例如：$\X=k\$，$\{a < X \leq b\}$，$···$，即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}
\{X = k\} =& \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\
\{X > b\} =& S - \{X \leq b\}, \\
\{a < X \leq b\} =& \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.
\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量；随机变量的函数一般也是随机变量。

要点

- 随机变量 $X = X(e)$ 是样本点 e 的函数, 定义域为 S, 值域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。
- 若 X 为随机变量，随机事件可表示为实数轴上的点集，例如：$\X=k\$，$\{a < X \leq b\}$, $···$，即

$$a < X \leq b := \{e | a < X(e) \leq b\} \subset S$$

- 用随机变量表示的随机事件之间的关系。

$$\begin{aligned}
\{X = k\} &= \{X \leq k\} - \{X < k\}, \\
\{X > b\} &= S - \{X \leq b\}, \\
\{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\}.
\end{aligned}$$

- 同一样本空间可映射为不同的随机变量；随机变量的函数一般也是随机变量。

随机变量与概率

随机变量：在值域上随机取值，不同值出现的概率不同。

问题

随机变量不同取值的概率如何定义?

- 对离散随机变量，假定样本空间为 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$，且概率函数为 P，随机变量 X 的值域为 $\mathcal{X}=\{x_1,\cdots,x_m\}$。定义 $\mathcal{X}$ 上的概率函数 P_X 为：

$$P_X\{X=x_i\}=P\left(\{e_j\in S|X(e_j)=x_i\}\right).$$

- 对于连续随机变量，P_X 定义为：对任意 $R\subset\mathcal{X}$，

$$P_X\{X\in R\}=P\left(\{e\in S|X(e)\in R\}\right)$$

- 可以证明 P_X 满足柯氏三公理，P_X 经常简写为 P。

随机变量与概率

随机变量：在值域上随机取值，不同值出现的概率不同。

问题

随机变量不同取值的概率如何定义?

- 对离散随机变量，假定样本空间为 $S=\{e_1,\cdots,e_n\}$, 且概率函数为 P, 随机变量 X 的值域为 $\mathcal{X}=\{x_1,\cdots,x_m\}$。定义 $\mathcal{X}$ 上的概率函数 P_X 为：

$$P_X\{X=x_i\}=P\left(\{e_j\in S|X(e_j)=x_i\}\right).$$

- 对于连续随机变量，P_X 定义为：对任意 $R\subset\mathcal{X}$，

$$P_X\{X\in R\}=P\left(\{e\in S|X(e)\in R\}\right)$$

- 可以证明 P_X 满足柯氏三公理，P_X 经常简写为 P。

例子

例子

将一枚硬币抛掷 3 次，我们感兴趣的是三次投掷中，出现 H 的总次数，而对 H, T 出现的次序不关心。以 X 记三次投掷中出现 H 的总次数，那么对于样本空间 $S=\{e\}$ 中的每一个样本点 e，X 都有一个值与之对应，即有

样本点	HHH	HHT	HTH	THH
X 的值	3	2	2	2
样本点	HTT	THT	TTH	TTT
X 的值	1	1	1	0

- **随机变量的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率。**
- 当且仅当事件 $A=\{\text{HHT, HTH, THH}\}$ 发生时有 $\{X=2\}$, 而且 $P(A)=\frac{3}{8}$, 则 $P\{X=2\}=\frac{3}{8}$。

离散型随机变量及其分布律

定义

定义

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k $(k = 1, 2, \cdots)$, X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律。也称为分布列或概率分布列。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律的性质

- 离散型随机变量 X 的可能取值是有限个或可列无限多个。
- 描述离散型随机变量X的概率特性常用分布律，也称分布列，概率分布列。
- $p_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \cdots)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

分布律的性质

- 离散型随机变量 X 的可能取值是有限个或可列无限多个。
- 描述离散型随机变量X的概率特性常用分布律，也称分布列，概率分布列。
- $p_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \cdots)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

例：分布律

例

设汽车在开往甲地途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立 地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯盏数，求 X 的概率分布与 $p=0.4$ 时的分布律。

X	0	1	2	3	4
P_k	$1-p$	$(1-p)p$	$(1-p)p^2$	$(1-p)p^3$	p^4

或 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{\min\{1,4-k\}}$.

将 $p=0.4$ 代入，得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.0256

例：分布律

例

设汽车在开往甲地途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立 地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯盏数，求 X 的概率分布与 $p=0.4$ 时的分布律。

X	0	1	2	3	4
P_k	$1-p$	$(1-p)p$	$(1-p)p^2$	$(1-p)p^3$	p^4

或 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{\min\{1,4-k\}}$.
将 $p=0.4$ 代入，得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.0256

常见离散型随机变量的分布律

0-1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$
二项分布	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$
泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$
超几何分布	$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}},\ k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\ k=1,2\cdots,$

常见离散型随机变量的分布律

0-1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$
二项分布	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$
泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$
超几何分布	$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}},\ k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\ k=1,2\cdots,$

常见离散型随机变量的分布律

0-1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$
二项分布	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$
泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$
超几何分布	$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}},\ k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\ k=1,2\cdots,$

常见离散型随机变量的分布律

0-1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$
二项分布	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$
泊松分布	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$
超几何分布	$P\{X=k\}=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}},\ k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\ k=1,2\cdots,$

常见离散型随机变量的分布律

0-1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$
二项分布	$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$
泊松分布	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots$
超几何分布	$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}},\ k=0,1,\cdots,\min\{n,M\}$
几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\ k=1,2\cdots,$

0-1 分布

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1$$

即

$X=x_k$	1	0
P_k	p	$1-p$

$0<p<1$.
适用场合：凡试验只有两个结果，常用$0-1$分布描述，如产品是否合格、人口性别统计、系统是否正常电力消耗超标等。

伯努利试验和二项分布

伯努利试验

#+begin$_{\text{export}}$ latex

伯努利试验

设试验 E 只有两个可能结果： A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利 (Bernoulli) 试验。

n 重伯努利试验

设 $P(A) = p(0 < p < 1)$，此时 $P(\overline{A}) = 1 - p$。将 E 独立地重复进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验。

重复: 是指在每次试验中 $P(A) = p$ 保持不变；

独立：指各次试验的结果互不影响，即若以 C_i 记第 i 次试验的结果，C_i 为 A 或 $\bar{A}$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 即

$$P\{C_1 C_2 \cdots C_n\} = P(C_1)P(C_2) \cdots P(C_n)$$

#+end$_{\text{export}}$ latex

伯努利试验和二项分布

二项分布

考虑 n 重伯努利试验，X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

记 $q=1-p$，则 $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$ 其满足归一化条件，

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(p+q)^n=1$$

称随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记为 $X\sim \mathrm{b}(n,p)$ 或 $X\sim \mathrm{b}(k;n,p)$.

例：伯努利试验和二项分布

例

独立射击 5000 次，命中率 0.001，求命中次数不少于 1 次的概率。

令 X 表示命中次数，则 $X \sim \mathrm{b}(k; 5000, 0.001)$,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{5000}{0} 0.001^0 0.999^{5000} \\ &= 0.9934 \end{aligned}$$

本例启示

小概率事件虽不易发生，但重复次数多了，就成大概率事件。

泊松分布

引例

刻画了在某个时段的计数：

- 大卖场的顾客数
- 点击某网站的次数
- 机场降落的飞机数
- 车站发出的车辆数
- 某医院的急诊病人数
- 某地区发生交通事故的次数
- 放射性物质发出的 α 粒子数

特点：独立性，平稳性，普遍性

常见离散型随机变量的分布律

泊松分布

若随机变量 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, \cdots$，而取各个值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \cdots$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布的泊松分布， 记为 $X \sim \pi(\lambda)$。

易知，$P\{X = k\} \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}e^{-\lambda} = 1$$

例

例

对北京某公共汽车站的客流进行调查，统计了天上午 10: 30 至 11:47 左右每隔 20 秒钟来到的乘客批数 (每批可能有数 人同时来到)，共得 230 个记录。我们分别计算了来到 0 批， 1 批， 2 批， 3 批， 4 批及 4 批以上乘客的时间区频数，结果 列于下表，其相应的频率与 $\lambda = 0.87$ 的泊松分布符合的很好。

来到批数 i	0	1	2	3	≥ 4	总共
频数 n_i	100	81	34	9	6	230
频率 $f_i = \frac{n_i}{n}$	0.43	0.35	0.15	0.04	0.03	
$P(i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{n!}$	0.42	0.36	0.16	0.05	0.01	

二项分布的泊松近似

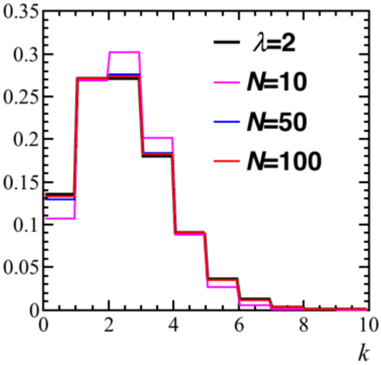
在很多应用问题中，我们常遇到这样的伯努利试：试次数 n 较大，每次成功的概率 p 很小，乘积 $\lambda = np$ 为适中的常数 。在这种情况下，可以用泊松近似。

泊松定理

在伯努利试验中 ，以 p_n 代表事件 A 在试验中出现的概率 ，如果当 $n \to \infty$ 时 $np_n \to \lambda$，其中 $\lambda > 0$ 为常数 ，则对任一非负整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} (p_n)^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

二项分布的泊松近似



例

- 对于以 $\lambda = 2$ 的泊松分布而言，相当于二项分布中的 $Np = 2$。
- 当 N 值增大时，为了保持 Np 不变，p 值相应减小。
- 可以从左图看出，当 N 大于 50 时，两种分布的区别几乎可以忽略。

例：三胞胎

例

假如生三胞胎的概率为 10^{-4}，求在 10^5 次生育中， 有 0,1,2 次生三胞胎的概率。

解：可视为为伯努利试验：$N = 10^5$, $p = 10^{-4}$。所求的概率为

$$\mathrm{b}(0; 10^5, 10^{-4}) = 0.000045378$$
$$\mathrm{b}(1; 10^5, 10^{-4}) = 0.00045382.$$
$$\mathrm{b}(2; 10^5, 10^{-4}) = 0.0022693$$

也可以用泊松分布近似，$\lambda = np = 10$, 有

$$\pi(0; 10) = 0.00004540$$
$$\pi(1; 10) = 0.0004540$$
$$\pi(2; 10) = 0.002270$$

例：射击命中率

例

独立射击 5000 次，命中率 0.001，求命中次数不少于 1 次的概率。

二项分布

令 X 表示命中次数，则 $X \sim$ b$(k; 5000, 0.001)$,

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 1) \\
=&1 - P(X < 1) \\
=&1 - P(X = 0) \\
=&1 - \binom{5000}{0} 0.001^0 0.999^{5000} \\
=&0.9934
\end{aligned}
$$

泊松近似

令 X 表示命中次数，则 $X \sim$ b$(5000, 0.001)$。令 $\lambda = np = 5$,

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 1) \\
\approx&1 - e^{-5} \\
=&0.993262
\end{aligned}
$$

此结果与用二项分布算得的 0.993279 相差不足万分之一

超几何与几何分布

超几何分布：定义

设有 N 件产品，其中有 M 件不合格品。若从中不放回地随机抽取 n 件，则其中含有的不合格品的件数 X 服从的分布称为超几何分布，其分布律为

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k=0,1,\cdots r$$

其中 $r=\min\{M,n\}$, 且 $M\leq N$, $n\leq N$, n,N 均为正整数。超几何分布记为 $X\sim h(n,N,M)$。

由组合等式 $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}=\binom{N}{n}$，可以证明

$$\sum_{k=0}^{r}P(X=k)=1.$$

几何分布：定义

设独立重复伯努利试验，每次试验中事件 A 发生的概率为 p。随机变量 X 定义为事件 A 首次发生时试验的次数，则 X 的可能取值为 $1, 2, \cdots$，服从的分布称为几何分布，其分布律为

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, \cdots$$

几何分布记为 $X \sim Ge(p)$。

由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$，可以证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

随机变量的分布函数

定义

定义

设 X 为随机变量, x 是任意实数, 称函数

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$

为 X 的 分布函数 ，也称为 累积分布函数 (cumulative distribution function).

用分布函数计算 X 落在区间 $(a, b]$ 里的概率：

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a).$$

分布函数的性质

- $F(x)$ 单调不减，即

$$\forall x_1 < x_2, F(x_1) \le F(x_2)$$

- $0 \le F(x) \le 1$ 且

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

- $F(X)$ 右连续，即

$$F(x+) = \lim_{t\to x+} F(t) = F(x).$$

用分布函数表示概率

- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
- $P(X < a) = P(X \le a - 0) = F(a - 0)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$

小试牛刀

- $P(a \le X \le b) =?$
- $P(a < X < b) =?$
- $P(a \le X < b) =?$

用分布函数表示概率

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X < a) = P(X \leq a - 0) = F(a - 0)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$

小试牛刀

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$
- $P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a - 0)$

例

例

设随机变量 X 的分布函数：$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + \frac{1}{3} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ 计算 $P(X = 0)$, $P(X = \frac{1}{4})$, $P(X \ge \frac{1}{4})$, $P(0 < X \le \frac{1}{3})$, $P(0 \le X \le \frac{1}{3})$.