# 条件概率与独立事件

续本达

清华大学 工程物理系

2023-09-25 清华

# 复习

# 概率

- 设 $S$ 为样本空间，$\mathcal{F}$ 是由 $S$ 的某些子集组成的一个事件域。如果对任意事件 $A \in \mathcal{F}$，定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足：
  非负性公理 $A \in \mathcal{F} \to P(A) \geq 0$,
  正则性公理 $P(S) = 1$,
  可加性公理 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互斥，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
  则称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率。三元素 $(S, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间。
- 直观定义、频率定义、古典概型、几何概型、贝叶斯定义

# 条件概率

# 引例

## 二孩问题

- 已知某一事件 $A$ 已经发生，要求另一事件 $B$ 发生的概率。
- 例如考虑有两个孩子的家庭，假定男女出生率一样，若以 $B$ 记随机选取的这样一个家庭中有一男一女这一事件，则显然 $P(B)=\frac{1}{2}$
- 但是如果我们预先知道这个家庭至少有一个女孩，那么，上述事件的概率便应是 $\frac{2}{3}$
  - 妈咪说 UP 主讲解“二孩悖论” https://www.ixigua.com/6958390352134799911

- 在已知事件 $A$ 发生的条件下，事件 $B$ 发生的概率，记为：$P(B|A)$
- 样本点总数 $n=4$ ，事件 B 包含的样本点数 $m_B=2$，因此 $P(B)=\frac{1}{2}$；事件 $A$ 包含的样本点数 $m_A=3$，而 $m_{AB}=2$，因此

$$P(B|A)=\frac{2}{3}=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{m_{AB}/n}{m_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

# 定义

设 $A, B$ 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) = P(AB)/P(A)$$

为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率。

## 基本性质

**非负性** 对于任何事件 $B$，有 $P(B|A) \geq 0$

**规范性** 对于必然事件 $S$，有 $P(S|A) = 1$

**可加性** 设 $B_1, B_2, \cdots$ 两两互不相容的事件，则有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

满足柯氏公理，的确是一种概率！

# 定义

设 $A, B$ 是两个随机事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) = P(AB)/P(A)$$

为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率。

## 基本性质

**非负性** 对于任何事件 $B$，有 $P(B|A) \geq 0$

**规范性** 对于必然事件 $S$，有 $P(S|A) = 1$

**可加性** 设 $B_1, B_2, \cdots$ 两两互不相容的事件，则有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

满足柯氏公理，的确是一种概率！

# 一般性质

对概率所证明的一些重要结果都适用于条件概率。例如：

$$P(\emptyset|A) = 0$$

$$P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A)$$

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

特别当 $A = S$ 时，条件概率化为无条件概率。

# 一般性质

对概率所证明的一些重要结果都适用于条件概率。例如：

$$P(\emptyset|A) = 0$$

$$P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A)$$

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

特别当 $A = S$ 时，条件概率化为无条件概率。

# 台灯寿命问题

**例**

LED 台灯能用 1000 小时的概率为 0.8，能用 1500 小时的概率为 0.4，求已用 1000 小时的 LED 能用到 1500 小时的概率

- $A$：LED 能用到 1000 小时
- $B$：LED 能用到 1500 小时

所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

# 乘法定理

# 乘法定理

利用条件概率求积事件的概率即乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A)(P(A) > 0)$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B)(P(B) > 0)$$

推广可以把乘法定理推广到任意 $n$ 个事件相交的场合：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 $n$ 个事件，$n \geq 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

# 例（Pólya 模型、传染病模型）

**例**

设袋中装有 $r$ 只红球，$t$ 只白球。每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 $a$ 只与所取出的那只球同色的球。若在袋中连续取球四次，试求第 1、2 次取到红球且第 3、4 次取到白球的概率。

- 以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示事件“第 $i$ 次取到红球”，则 $\overline{A}_3,\overline{A}_4$ 分别表示事件第 3、4 次取到白球。所求概率为

$$\begin{aligned}
P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4) &= P(A_1A_2\overline{A}_3)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3) \\
&= P(A_1A_2)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3) \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3) \\
&= \frac{r}{r+t}\frac{r+a}{r+t+a}\frac{t}{r+t+2a}\frac{t+a}{r+t+3a}
\end{aligned} \tag{1}$$

# 例：安全监控

**例**

江门中微子地下实验大厅中，有 A 与 B 两种报警设备，已知设备 A 单独使用时有效的概率为 0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为 0.93, 在设备 A 失效的条件下，设备 B 有效的概率为 0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

- 设事件 $A, B$ 分别表示设备 A,B 有效。已知 $P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|\overline{A}) = 0.85$，求 $P(A \cup B)$。

$$P(B|\overline{A}) = P(B\overline{A})/P(\overline{A}) = (P(B) - P(AB))/(1 - P(A))$$

$$\Longrightarrow 0.85 = (0.93 - P(AB))/(0.08) \tag{2}$$

$$\Longrightarrow P(AB) = 0.862$$

$$\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988$$

# 例：安全监控

**例**

江门中微子地下实验大厅中，有 A 与 B 两种报警设备，已知设备 A 单独使用时有效的概率为 0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为 0.93, 在设备 A 失效的条件下，设备 B 有效的概率为 0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

- 设事件 $A, B$ 分别表示设备 A,B 有效。已知 $P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|\overline{A}) = 0.85$，求 $P(A \cup B)$。

$$P(B|\overline{A}) = P(B\overline{A})/P(\overline{A}) = (P(B)-P(AB))/(1-P(A))$$

$$\Longrightarrow 0.85 = (0.93-P(AB))/(0.08) \tag{2}$$

$$\Longrightarrow P(AB) = 0.862$$

$$\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988$$

# 例：安全监控

**例**

江门中微子地下实验大厅中，有 A 与 B 两种报警设备，已知设备 A 单独使用时有效的概率为 0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为 0.93, 在设备 A 失效的条件下，设备 B 有效的概率为 0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

- 设事件 $A, B$ 分别表示设备 A,B 有效。已知 $P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|\overline{A}) = 0.85$，求 $P(A \cup B)$。

$$
\begin{aligned}
& P(B|\overline{A}) = P(B\overline{A})/P(\overline{A}) = (P(B) - P(AB))/(1 - P(A)) \\
\Longrightarrow\ & 0.85 = (0.93 - P(AB))/(0.08) \\
\Longrightarrow\ & P(AB) = 0.862 \\
\Longrightarrow\ & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.92 + 0.93 - 0.862 = 0.988
\end{aligned} \tag{2}
$$

# 例：安全监控

**例**

江门中微子地下实验大厅中，有 A 与 B 两种报警设备，已知设备 A 单独使用时有效的概率为 0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为 0.93, 在设备 A 失效的条件下，设备 B 有效的概率为 0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

- 设事件 $A, B$ 分别表示设备 A,B 有效。已知 $P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B|\overline{A}) = 0.85$，求 $P(A\cup B)$。

$$
\begin{aligned}
&P(B|\overline{A}) = P(B\overline{A})/P(\overline{A}) = (P(B)-P(AB))/(1-P(A)) \\
\Longrightarrow\ & 0.85 = (0.93-P(AB))/(0.08) \\
\Longrightarrow\ & P(AB) = 0.862 \\
\Longrightarrow\ & P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 0.92+0.93-0.862 = 0.988
\end{aligned} \tag{2}
$$

# 例：安全监控另一种解

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A \cup B}) =& P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) \\
=& P(\overline{A})[1 - P(B|\overline{A})] \\
=& 0.08[1 - 0.85] \\
=& 0.012 \\
\Longrightarrow & P(A \cup B) = 0.988
\end{aligned}
\tag{3}
$$

# 全概率公式

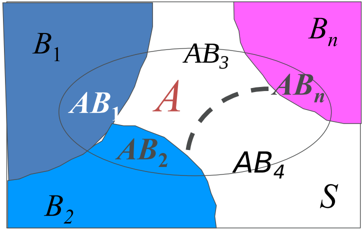
# 定义

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$，$A$ 为 $E$ 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 $S$ 的一个分割，且

$$P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n),$$

则事件 $A$ 的概率为

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$




- $\{AB_i\}$ 是 $A$ 的一个划分

# 重要性：求复杂事件概率的有力工具

应用全概率公式的关键

1. 建立样本空间的正确划分，即构造一个正确的完备事件组
2. 计算各个概率和条件概率
3. 代入全概率公式

# 例：粮食质量

例

播种用的一等小麦种子中混合 2%的二等种子，1.5%的三等种子，1%的四等种子。用一等、二等、三等、四等种子长出的穗含 50 颗以上麦粒的概率分别是 0.5, 0.15, 0.1, 0.05，求这批种子所结的穗含有 50 颗以上麦粒的概率。
注：粮食安全传送门

- 设从这批种子中任选一颗是一等、二等、三等、四等种子的事件分别记为 $B_1, B_2, B_3, B_4$，构成样本空间的分割。用 $A$ 表示在种子中任选一颗，且此种子所结穗含有 50 颗以上麦粒这一事件，由全概率公式

$$\begin{aligned} P(A) =& \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i) \\ =&0.955 \times 0.5 + 0.02 \times 0.15 + 0.015 \times 0.1 + 0.01 \times 0.05 \\ =&0.4825 \end{aligned} \tag{4}$$

# 例：玄学考试

**例**

考卷中一道选择题有 4 个答案，仅有一个是正确的，设一个学生知道正确答案或不知道而乱猜是等可能的。如果这个学生答对了，求他确实知道正确答案的概率。

- 样本空间划分为事件 $A$：知道正确答案；$\overline{A}$：不知道。以 $B$ 表示学生答对事件。由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B) =& P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\
=& \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
P(AB) =& P(A)P(B|A) = 1/2 \times 1 = 1/2 \\
\Longrightarrow P(A|B) =& \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/2}{5/8} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

# 例：玄学考试

**例**

考卷中一道选择题有 4 个答案，仅有一个是正确的，设一个学生知道正确答案或不知道而乱猜是等可能的。如果这个学生答对了，求他确实知道正确答案的概率。

- 样本空间划分为事件 $A$：知道正确答案；$\overline{A}$：不知道。以 $B$ 表示学生答对事件。由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B) =& P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\
=& \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \\
P(AB) =& P(A)P(B|A) = 1/2 \times 1 = 1/2 \\
\Longrightarrow P(A|B) =& \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/2}{5/8} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

# 例：敏感问题调查

**例**

调查考试作弊的情况。尽管是匿名调查，但可能仍有人会心有顾虑。有什么办法得到更可靠的结果吗?

- 可以设计两个问题：
  1. 考试是否作弊了？ A. 是 B. 否
  2. 生日是 7 月 1 日前吗？ A. 是 B. 否

  每个参与调查的同学通过抛硬币决定回答哪个问题：正面回答第 1 个问题；反面回答第 2 个问题。
- 其他人无法知道参与调查的人回答的是哪个问题，但问卷设计者可以利用全概率公式得到想调查的问题的结果！

# 例：敏感问题调查

**例**

调查考试作弊的情况。尽管是匿名调查，但可能仍有人会心有顾虑。有什么办法得到更可靠的结果吗？

- 可以设计两个问题：
  1. 考试是否作弊了？ A. 是 B. 否
  2. 生日是 7 月 1 日前吗？ A. 是 B. 否

  每个参与调查的同学通过抛硬币决定回答哪个问题：正面回答第 1 个问题；反面回答第 2 个问题。
- 其他人无法知道参与调查的人回答的是哪个问题，但问卷设计者可以利用全概率公式得到想调查的问题的结果！

# 原理

假设共 $N$ 个人参与调查，收回的问卷中有 $n$ 张问卷选择了 A。假设 $N$ 足够大，可以认为 $P(\text{是}) = n/N$。由全概率公式

$$P(\text{是}) = P(\text{是}|\text{正})P(\text{正}) + P(\text{是}|\text{反})P(\text{反})$$

- 假设硬币是公平硬币，正反面的概率相同：$P(\text{正}) = 0.5, P(\text{反}) = 0.5$
- 同时在 N 足够大的条件下，可以近似认为生日是否在 7 月 1 日前的概率为 0.5，即 $P(\text{是}|\text{反}) = 0.5$。
- 假设考试作弊的概率为 $p$，则 $P(\text{是}|\text{正}) = p$。因此

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= p \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 \\ \implies p &= \frac{2n}{N} - 0.5 \end{aligned} \tag{6}$$

## 原理

假设共 $N$ 个人参与调查，收回的问卷中有 $n$ 张问卷选择了 A。假设 $N$ 足够大，可以认为 $P(\text{是}) = n/N$。由全概率公式

$$P(\text{是}) = P(\text{是}|\text{正})P(\text{正}) + P(\text{是}|\text{反})P(\text{反})$$

- 假设硬币是公平硬币，正反面的概率相同：$P(\text{正}) = 0.5, P(\text{反}) = 0.5$
- 同时在 N 足够大的条件下，可以近似认为生日是否在 7 月 1 日前的概率为 0.5，即 $P(\text{是}|\text{反}) = 0.5$。
- 假设考试作弊的概率为 $p$，则 $P(\text{是}|\text{正}) = p$。因此

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= p \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 \\ \implies p &= \frac{2n}{N} - 0.5 \end{aligned} \tag{6}$$

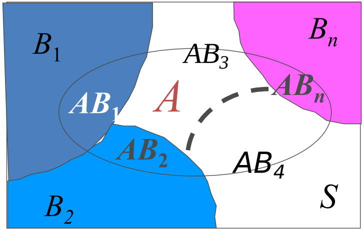
# 贝叶斯公式

# 定义

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$。$A$ 为 $E$ 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

上式称为贝叶斯 (Bayes) 公式。



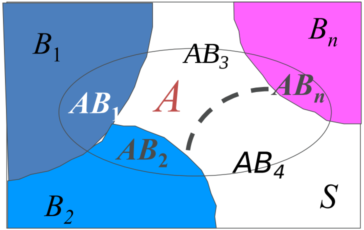

贝叶斯定理往往与全概率公式同时使用。全概率公式一般用于“由因求果”问题，而贝叶斯定理一般用于“执果寻因”问题，在使用时要分清是什么问题，确定应用哪个公式。

# 定义

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$。$A$ 为 $E$ 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

上式称为贝叶斯 (Bayes) 公式。




贝叶斯定理往往与全概率公式同时使用。全概率公式一般用于“由因求果”问题，而贝叶斯定理一般用于“执果寻因”问题，在使用时要分清是什么问题，确定应用哪个公式。

# 证明

由条件概率的定义

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}, P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A)P(A) = P(A|B_i)P(B_i)$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \tag{7}$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

$n = 2$ 时，$B$ 和 $\overline{B}$ 构成一个划分

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \tag{8}$$

# 证明

由条件概率的定义

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}, P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A)P(A) = P(A|B_i)P(B_i)$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \tag{7}$$

$$\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

$n = 2$ 时，$B$ 和 $\overline{B}$ 构成一个划分

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \tag{8}$$

# 证明

由条件概率的定义

$$
\begin{aligned}
P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}, P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)} \\
\Longrightarrow P(B_i|A)P(A) = P(A|B_i)P(B_i) \\
\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \\
\Longrightarrow P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$n = 2$ 时，$B$ 和 $\overline{B}$ 构成一个划分

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \\
P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}
\end{aligned} \tag{8}
$$

# 证明

由条件概率的定义

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(AB_i)}{P(A)}, P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)} \\ \Longrightarrow P(B_i|A)P(A) &= P(A|B_i)P(B_i) \\ \Longrightarrow P(B_i|A) &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \\ \Longrightarrow P(B_i|A) &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} \end{aligned} \tag{7}$$

$n = 2$ 时，$B$ 和 $\overline{B}$ 构成一个划分

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \\ P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \end{aligned} \tag{8}$$

# 证明

由条件概率的定义

$$
\begin{aligned}
P(B_i|A) &= \frac{P(AB_i)}{P(A)}, P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)} \\
\Longrightarrow P(B_i|A)P(A) &= P(A|B_i)P(B_i) \\
\Longrightarrow P(B_i|A) &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \\
\Longrightarrow P(B_i|A) &= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

## $n = 2$ 时，$B$ 和 $\overline{B}$ 构成一个划分

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \\
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

# 例：新冠病毒检验

**例**

假设对任意一个人而言，感染上 nCov 的概率为 $P(C)=0.001, P(\overline{C})=0.999$。任何一次 nCov 检查的结果只有阴性 (-) 或阳性 (+) 两种。假设有 <u>真阳</u> $P(+|C)=0.98$， <u>假阴</u> $P(-|C)=0.02$， <u>假阳</u> $P(+|\overline{C})=0.03$， <u>真阴</u> $P(-|\overline{C})=0.97$
如果你的检查结果为阳性 (+)，而你却觉得自己无明显感染渠道。那么你是否应担心自己真的感染上了 nCov?

$$
\begin{aligned}
P(C|+) =& \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C)+P(+|\overline{C})P(\overline{C})} \\
=&(0.98\times 0.001)/(0.98\times 0.001+0.03\times 0.999)=0.032
\end{aligned}
\tag{9}
$$

- 从你角度看：对自己染上 nCov 结果的可信度为 3.2%。
- 从医生角度看：像你这样的人有 3.2%感染上了 nCov。

**例**

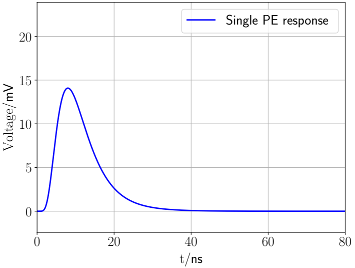
假设对任意一个人而言，感染上 nCov 的概率为 $P(C) = 0.001, P(\overline{C}) = 0.999$。任何一次 nCov 检查的结果只有阴性 (-) 或阳性 (+) 两种。假设有 <u>真阳</u> $P(+|C) = 0.98$， <u>假阴</u> $P(-|C) = 0.02$， <u>假阳</u> $P(+|\overline{C}) = 0.03$， <u>真阴</u> $P(-|\overline{C}) = 0.97$

如果你的检查结果为阳性 (+)，而你却觉得自己无明显感染渠道。那么你是否应担心自己真的感染上了 nCov?

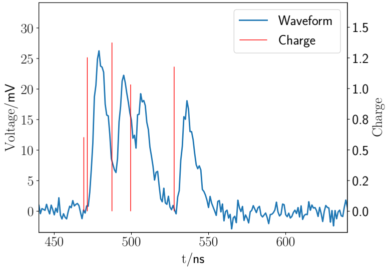
$$
\begin{aligned}
P(C|+) =& \frac{P(+|C)P(C)}{P(+|C)P(C) + P(+|\overline{C})P(\overline{C})} \\
=&(0.98 \times 0.001)/(0.98 \times 0.001 + 0.03 \times 0.999) = 0.032
\end{aligned} \tag{9}
$$

- 从你角度看：对自己染上 nCov 结果的可信度为 3.2%。
- 从医生角度看：像你这样的人有 3.2%感染上了 nCov。

# 例：Richardson-Lucy Direct Demodulation




(a) Single PE response $V_{\mathrm{PE}}(t)$.




(b) PE pile-up and white noise in an PMT waveform.

- 参考 `https://arxiv.org/abs/2112.06913`
  张爱强等 *Towards the ultimate PMT waveform analysis for neutrino and dark matter experiments* 第 3.3.2 节

# 例：Richardson-Lucy Direct Demodulation

## 贝叶斯公式的应用

We view $V_{\mathrm{PE}*}(t-s)$ as a conditional probability distribution $p(t|s)$ where $t$ denotes PMT amplified electron time, and $s$ represents the given PE time. By the Bayesian rule,

$$\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s) = \tilde{\phi}_*(s)p(t|s) = p(t,s) = \tilde{w}_*(t)p(s|t), \tag{10}$$

where $p(t,s)$ is the joint distribution of amplified electron $t$ and PE time $s$, and $\tilde{w}$ is the smoothed $w$.
Cancel out the normalization factors,

$$p(s|t) = \frac{\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\tilde{w}_*(t)} = \frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int\tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}. \tag{11}$$

Then a recurrence relation $\phi_*$ is,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_*(s) &= \int p(s|t)\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t = \int\frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int\tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t \\ \implies \hat{\phi}^{n+1}(s) &= \int\frac{\hat{\phi}^n(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\int\hat{\phi}^n(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{12}$$

where only $V_{\mathrm{PE}*}$ in the numerator is normalized, and superscript $n$ denotes the iteration step.

# 例：Richardson-Lucy Direct Demodulation

## 贝叶斯公式的应用

We view $V_{\mathrm{PE}*}(t-s)$ as a conditional probability distribution $p(t|s)$ where $t$ denotes PMT amplified electron time, and $s$ represents the given PE time. By the Bayesian rule,

$$\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s) = \tilde{\phi}_*(s)p(t|s) = p(t,s) = \tilde{w}_*(t)p(s|t), \tag{10}$$

where $p(t,s)$ is the joint distribution of amplified electron $t$ and PE time $s$, and $\tilde{w}$ is the smoothed $w$. Cancel out the normalization factors,

$$p(s|t) = \frac{\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\tilde{w}_*(t)} = \frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int\tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}. \tag{11}$$

Then a recurrence relation $\phi_*$ is,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_*(s) &= \int p(s|t)\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t = \int \frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int\tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t \\ \implies \hat{\phi}^{n+1}(s) &= \int \frac{\hat{\phi}^n(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\int\hat{\phi}^n(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{12}$$

where only $V_{\mathrm{PE}*}$ in the numerator is normalized, and superscript $n$ denotes the iteration step.

# 例：Richardson-Lucy Direct Demodulation

## 贝叶斯公式的应用

We view $V_{\mathrm{PE}*}(t-s)$ as a conditional probability distribution $p(t|s)$ where $t$ denotes PMT amplified electron time, and $s$ represents the given PE time. By the Bayesian rule,

$$\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s) = \tilde{\phi}_*(s)p(t|s) = p(t,s) = \tilde{w}_*(t)p(s|t), \tag{10}$$

where $p(t,s)$ is the joint distribution of amplified electron $t$ and PE time $s$, and $\tilde{w}$ is the smoothed $w$. Cancel out the normalization factors,

$$p(s|t) = \frac{\tilde{\phi}_*(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\tilde{w}_*(t)} = \frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int \tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}. \tag{11}$$

Then a recurrence relation $\phi_*$ is,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_*(s) &= \int p(s|t)\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t = \int \frac{\tilde{\phi}(s)V_{\mathrm{PE}}(t-s)}{\int \tilde{\phi}(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}_*(t)\mathrm{d}t \\ \implies \hat{\phi}^{n+1}(s) &= \int \frac{\hat{\phi}^n(s)V_{\mathrm{PE}*}(t-s)}{\int \hat{\phi}^n(s')V_{\mathrm{PE}}(t-s')\mathrm{d}s'}\tilde{w}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{12}$$

where only $V_{\mathrm{PE}*}$ in the numerator is normalized, and superscript $n$ denotes the iteration step.

# 先验概率与后验概率

- 假定 $B_1, B_2, \cdots$ 是导致试验结果的“原因”，$P(B_i)$ 称为先验概率
  - 反映了各种“原因”发生的可能性大小，
  - 一般是以往经验的总结，在试验前已经知道。
- 现在若试验产生了事件 $A$，这个信息将有助于探讨事件发生的“原因”。条件概率 $P(B_i|A)$ 称为后验概率
  - 反映了试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的新知识。

**思考**

$P(B_i|A) \geq P(B_i)$ 还是 $P(B_i|A) \leq P(B_i)$？

# 先验概率与后验概率

- 假定 $B_1, B_2, \cdots$ 是导致试验结果的“原因”，$P(B_i)$ 称为先验概率
  - 反映了各种“原因”发生的可能性大小，
  - 一般是以往经验的总结，在试验前已经知道。
- 现在若试验产生了事件 $A$，这个信息将有助于探讨事件发生的“原因”。条件概率 $P(B_i|A)$ 称为后验概率
  - 反映了试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的新知识。

**思考**

$P(B_i|A) \geq P(B_i)$ 还是 $P(B_i|A) \leq P(B_i)$？

# 先验概率与后验概率

- 假定 $B_1, B_2, \cdots$ 是导致试验结果的“原因”，$P(B_i)$ 称为先验概率
  - 反映了各种“原因”发生的可能性大小，
  - 一般是以往经验的总结，在试验前已经知道。
- 现在若试验产生了事件 $A$，这个信息将有助于探讨事件发生的“原因”。条件概率 $P(B_i|A)$ 称为后验概率
  - 反映了试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的新知识。

**思考**

$P(B_i|A) \geq P(B_i)$ 还是 $P(B_i|A) \leq P(B_i)$ ?

# 例：逆向盲盒

**例**

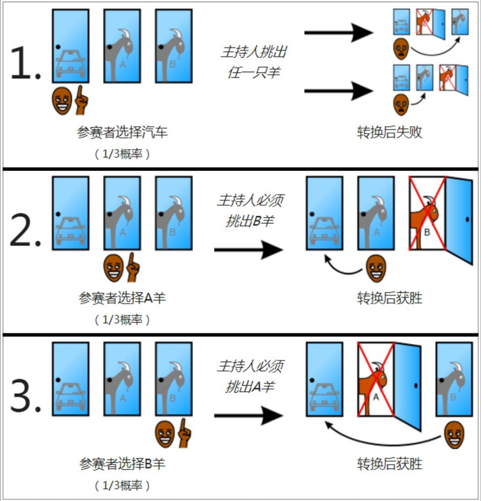
口袋中有一只球，不知它是黑的还是白的。现再往口袋中放入一只白球，然后从口袋中任意取出一只，发现是白球。口袋中原来的那只球是白球的可能性多大？

# 例：三门问题

例

参赛者会看见三扇关闭的门，其中一扇门后面有一辆汽车，选中这扇门就可以赢得后面的汽车；另外两扇门后面各藏有一只山羊。
游戏中参赛者先选定一扇门，但在开启门之前，知道内情的节目主持人会在剩下的两扇门中选择一个背后是山羊的门并打开。
此时，主持人会讯问参赛者是否更换其选择的门。问题是：参赛者更换选择是否会增加赢得汽车的机会?

# 全概率法



参赛者最初选择时有1/3的相同概率选择汽车、A羊和B羊，转换后的获胜概率为2/3。

有三种可能的情况，全部都有相等的可能性（1/3）：

- 参赛者挑汽车，主持人挑两头羊的任何一头。换门则失败。
- 参赛者挑 A 羊，主持人挑 B 羊。转门将赢得汽车。
- 参赛者挑 B 羊，主持人挑 A 羊。转门将赢得汽车。

# 贝叶斯法

不失一般性，可以始终将嘉宾选择的门标记为“1”，将主持人打开的门标记为“3”，将剩下的门标记为“2”。第 $i$ 个门后面是汽车的先验概率为

$$P(T_i) = \frac{1}{3}$$

- 如果汽车在 1 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_1) = \frac{1}{2}$
- 如果汽车在 2 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_2) = 1$
- 如果汽车在 3 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_3) = 0$

由贝叶斯定理，主持人打开 3 号门的条件下，在 1 号门和 2 号门发现汽车的条件概率分别为：

$$\begin{aligned}
P(T_1|O_3) &= \frac{P(O_3|T_1)P(T_1)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_1)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)} = \frac{1/2}{1/2+1+0} = \frac{1}{3} \\
P(T_2|O_3) &= \frac{P(O_3|T_2)P(T_2)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_2)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)} = \frac{1}{1/2+1+0} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{13}$$

所以，参赛者变更选择后获得汽车的概率更大。

# 贝叶斯法

不失一般性，可以始终将嘉宾选择的门标记为“1”，将主持人打开的门标记为“3”，将剩下的门标记为“2”。第 $i$ 个门后面是汽车的先验概率为

$$P(T_i) = \frac{1}{3}$$

- 如果汽车在 1 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_1) = \frac{1}{2}$
- 如果汽车在 2 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_2) = 1$
- 如果汽车在 3 号门，主持人打开 3 号门的条件概率为 $P(O_3|T_3) = 0$

由贝叶斯定理，主持人打开 3 号门的条件下，在 1 号门和 2 号门发现汽车的条件概率分别为：

$$\begin{aligned}
P(T_1|O_3) &= \frac{P(O_3|T_1)P(T_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|T_i)} = \frac{1/2}{1/2+1+0} = \frac{1}{3} \\
P(T_2|O_3) &= \frac{P(O_3|T_2)P(T_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|T_i)} = \frac{1}{1/2+1+0} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{13}$$

所以，参赛者变更选择后获得汽车的概率更大。

# 独立事件

# 定义

设 $A, B$ 为事件域中的两个事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，简称 $A$ 与 $B$ 独立。

## 条件概率

若 $A$ 与 $B$ 独立，且 $P(A) \neq 0$，$P(B) \neq 0$，则条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

即，$A$ 发生与否不影响 $B$，$B$ 发生与否不影响 $A$。

# 用 $P(AB) = P(A)P(B)$ 定义独立性的优点

1. 该定义不排斥零概率事件；
2. 该定义对事件 $A$ 和 $B$ 对称。

用条件概率定义独立性则不具备这两点。

**事件独立的内涵**

两个事件是否相互独立只能从定义而非直观出发，并且事件的独立是相对于概率而言的。

**例**

向区间 $(0,1)$ 内随机投一点 $x$，事件 $A$ 表示 $x \in (0, \frac{1}{2})$，事件 $B$ 表示 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$。显然 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，并且 $AB = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$。$A$ 和 $B$ 相互独立！

# 用 $P(AB) = P(A)P(B)$ 定义独立性的优点

1. 该定义不排斥零概率事件；
2. 该定义对事件 $A$ 和 $B$ 对称。

用条件概率定义独立性则不具备这两点。

## 事件独立的内涵

两个事件是否相互独立只能从定义而非直观出发，并且事件的独立是相对于概率而言的。

**例**

向区间 $(0,1)$ 内随机投一点 $x$，事件 $A$ 表示 $x \in (0, \frac{1}{2})$，事件 $B$ 表示 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$。显然 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，并且 $AB = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$。$A$ 和 $B$ 相互独立！

# 用 $P(AB) = P(A)P(B)$ 定义独立性的优点

1. 该定义不排斥零概率事件；
2. 该定义对事件 $A$ 和 $B$ 对称。

用条件概率定义独立性则不具备这两点。

## 事件独立的内涵

两个事件是否相互独立只能从定义而非直观出发，并且事件的独立是相对于概率而言的。

**例**

向区间 $(0,1)$ 内随机投一点 $x$，事件 $A$ 表示 $x \in (0, \frac{1}{2})$，事件 $B$ 表示 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$。显然 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$，并且 $AB = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$。$A$ 和 $B$ 相互独立！

# 两事件相互独立的性质

- 两事件 $A$ 与 $B$ 相互独立是相互对称的
- 零概率事件和必然事件与其他任意事件都独立。
- 若 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=P(B)$；若 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(A)$
- 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则“事件 $A$ 与 事件 $B$ 相互独立”和“事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥”不能同时成立。
- 若事件 $A$ 与 $B$ 独立，则 $A$ 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 $B$ 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立。

# 三事件相互独立

设 $A, B, C$ 为三个事件，如果满足：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \tag{14}$$

则称 $A, B, C$ 两两独立。若同时还满足

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 $A, B, C$ 相互独立。

- $A, B, C$ 相互独立 $\to$ $A, B, C$ 两两独立
- 反之不然

# 三事件相互独立

设 $A, B, C$ 为三个事件，如果满足：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \tag{14}$$

则称 $A, B, C$ 两两独立。若同时还满足

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 $A, B, C$ 相互独立。

- $A, B, C$ 相互独立 $\rightarrow$ $A, B, C$ 两两独立
- 反之不然

# 三事件相互独立

设 $A, B, C$ 为三个事件，如果满足：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \tag{14}$$

则称 $A, B, C$ 两两独立。若同时还满足

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 $A, B, C$ 相互独立。

- $A, B, C$ 相互独立 $\rightarrow$ $A, B, C$ 两两独立
- 反之不然

# 例：两两独立不能保证相互独立

**例**

随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子。事件 $A$ 表示 1 号骰子向上一面出现奇数；$B$ 表示 2 号骰子向上一面出现奇数；$C$ 表示两骰子出现的点数之和为奇数。$A, B, C$ 是否相互独立?

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B) = P(C) &= \frac{1}{2} \\
P(AB) = P(A)P(B) &= \frac{1}{4} \\
P(AC) = P(A)P(C) &= \frac{1}{4} \\
P(BC) = P(B)P(C) &= \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{15}
$$

因此 $A, B, C$ 两两独立。

- 但是，$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$，不满足相互独立的条件。

# 例：两两独立不能保证相互独立

**例**

随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子。事件 $A$ 表示 1 号骰子向上一面出现奇数；$B$ 表示 2 号骰子向上一面出现奇数；$C$ 表示两骰子出现的点数之和为奇数。$A, B, C$ 是否相互独立?

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) = \frac{1}{4} \\ P(AC) &= P(A)P(C) = \frac{1}{4} \\ P(BC) &= P(B)P(C) = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{15}$$

因此 $A, B, C$ 两两独立。

- 但是，$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$，不满足相互独立的条件。

# 例：两两独立不能保证相互独立

**例**

随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子。事件 $A$ 表示 1 号骰子向上一面出现奇数；$B$ 表示 2 号骰子向上一面出现奇数；$C$ 表示两骰子出现的点数之和为奇数。$A, B, C$ 是否相互独立?

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B) = P(C) &= \frac{1}{2} \\
P(AB) = P(A)P(B) &= \frac{1}{4} \\
P(AC) = P(A)P(C) &= \frac{1}{4} \\
P(BC) = P(B)P(C) &= \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{15}
$$

因此 $A, B, C$ 两两独立。

- 但是，$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$，不满足相互独立的条件。

# 例：两两独立不能保证相互独立

**例**

随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子。事件 $A$ 表示 1 号骰子向上一面出现奇数；$B$ 表示 2 号骰子向上一面出现奇数；$C$ 表示两骰子出现的点数之和为奇数。$A, B, C$ 是否相互独立？

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B) = P(C) &= \frac{1}{2} \\
P(AB) = P(A)P(B) &= \frac{1}{4} \\
P(AC) = P(A)P(C) &= \frac{1}{4} \\
P(BC) = P(B)P(C) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

因此 $A, B, C$ 两两独立。

- 但是，$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$，不满足相互独立的条件。

# 多事件相互独立

设有 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，对任意 $1 \le i < j < k < \cdots \le n$，如果满足：

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases} \tag{16}$$

## 经验

实际应用中，往往根据直观和外部经验来判断多个事件的相互独立性。

# 常用结论

若 $A, B, C$ 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 $C$ 独立，
- $A \cap B$ 与 $C$ 独立，
- $A - B$ 与 $C$ 独立。

## 利用独立事件的性质计算其并事件的概率

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

特别地，若 $P(A_i) = p$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1 - p)^n$$

# 常用结论

若 $A, B, C$ 相互独立，则

- $A \cup B$ 与 $C$ 独立，
- $A \cap B$ 与 $C$ 独立，
- $A - B$ 与 $C$ 独立。

## 利用独立事件的性质计算其并事件的概率

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

特别地，若 $P(A_i) = p$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (1 - p)^n$$

# 例：平衡方程

**例**

口袋中有 3 个白球、5 个黑球，甲、乙两人轮流从口袋中有返回地取一球，甲先取。谁先取到白球为胜。求甲胜的概率。

- 记“甲胜”为事件 $A$，概率为 $P(A)$。
- 记“甲第一次取球获胜”为事件 $A_1$，“甲乙先后取一球后均没有获胜”为事件 $B$，则

$$P(A_1) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

$$\begin{aligned} P(A) =& P(A_1) + P(A|B)P(B) \\ =& P(A_1) + P(B)P(A) = \frac{3}{8} + \frac{25}{64}P(A) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{8}{13}$$

# 例：平衡方程

**例**

口袋中有 3 个白球、5 个黑球，甲、乙两人轮流从口袋中有返回地取一球，甲先取。谁先取到白球为胜。求甲胜的概率。

- 记“甲胜”为事件 $A$，概率为 $P(A)$。
- 记“甲第一次取球获胜”为事件 $A_1$，“甲乙先后取一球后均没有获胜”为事件 $B$，则

$$P(A_1)=\frac{3}{8},P(B)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$$

$$\begin{aligned}P(A)=&P(A_1)+P(A|B)P(B)\\=&P(A_1)+P(B)P(A)=\frac{3}{8}+\frac{25}{64}P(A)\\\Longrightarrow P(A)=\frac{8}{13}\end{aligned} \tag{17}$$

# 独立事件笑话


一个统计学家算出飞机上有 1 炸弹的概率是百万分之一，故他从不坐飞机。一次他到很远的地方开会，同事问，你坐火车来？他说不，坐飞机。同事很纳闷，他解释道："我计算出飞机上有一个炸弹的概率是百万分之一，而同时有 2 炸弹的概率只有万亿分之一，这个概率是我所能接受的，所以我自己带了一个炸弹上了飞机。"
https://www.zhihu.com/question/23066534