课程介绍、随机事件

续本达

清华大学 工程物理系

2023-09-18 清华

认识大家

教学团队

- 主讲 续本达
  - 2005-2009 在数理基科班学习
  - 2009-2018 在日本神冈地下实验室，学习研究中微子和暗物质
  - 2018-至今 在工程物理系近代物理研究所任教
    主要工作：锦屏中微子实验
    1. JUNO 江门中微子实验
    2. 日本 SuperK 超级神冈实验
    3. 日本 XMASS 暗物质实验

    研究兴趣：太阳中微子、中微子质量本源
    爱好：大数据分析、高性能计算、系统架构运维
- 助教 郝传晖
  - 物理系本科毕业，工物系博士生
  - 爱好：篮球

学生构成

- 工物 10、工物 02、核 02、核 11、核 12 共 12 名

课程概况

课程评价

- 期中、期末闭卷考试：70%
- 平时作业：25%
  - 每周一收上一周作业
- 课程贡献：5%
  - 课堂抢答、提问、质疑、 ~~调皮~~ 、 ~~扛精~~
  - 指出教学资料中的错误
  - 用 R 语言处理实验课的数据，成为案例
  - 其它贡献
- 课赛结合：2023 Ghost Hunter 中微子数据分析排位赛
  - 一等奖队伍：保送 A+
  - 二等奖队伍：+8%
  - 三等奖队伍：+3%
  - 灵活应该课程中的方法解决竞赛中的问题，可额外计入课程贡献

教材

- 《概率论与数理统计》（第五版）
  - 盛骤，谢式千，潘承毅 编著
  - 高等教育出版社 出版
  - 引入了 R 语言辅助教学

参考书

1. 《概率论与数理统计教程》(第二版)，茆诗松等编著，高等教育出版社 (2011)
   - 在概率论部分讲得非常好。数学严谨性比较强，题目不太容易
2. 《Information theory, inference and learning algorithm》，David J. Mackay 著，Cambridge Press (2003)
   - 信息论、统计力学、统计推断和机器学习的大统一，适合有物理学基础的同学
3. 《测量不确定度导论》，(澳) 莱斯 ▪ 柯卡普等著，曾翔君等 译，西安交通大学出版社 (2011)
   - 量测技术部分参考
4. 《实验物理中的概率和统计》(第二版)，朱永生著， 科学出版社 (2006)
   - 偏向于概率统计在实验中的应用，内容很全。
5. Statistical Data Analysis, Glen Cowan, Clarendon Press Oxford, 1998
   - 一本非常简要的教材，需要有一定的概率论基础。统计方法以及介绍得非常好。
6. Data Analysis and Graphics Using R: An Example-Based Approach, 2nd Edition, John Maindonald and John Braun.
   - R 语言参考大全

概论

释义

概率统计分析　概率论与数理统计

量测技术　应用到物理实验和测量中

概率论与数理统计

确定现象　一定条件下必然发生的现象

- 例如：太阳从东方升起；上抛物体下落等

随机现象　在一定的条件下并不总是出现相同结果的现象

- 带有随机性、偶然性的现象
- 例如：掷一颗骰子出现的点数；抛硬币出现的正反面等

随机现象

每次试验前不能预言出现什么结果

不确定性 每次试验后出现的结果不止一个

统计规律性 在相同的条件下进行大量观察或试验时，出现的结果有一定的规律性

概率论

- 研究和揭示随机现象的统计规律性的科学
- Probability Theory is Nothing but Common Sense Reduced to Calculations – Pierre-Simon Laplace

学习概率统计重在应用

- 统计方法是从大量（实验）数据中总结提取一般规律的必要手段，概率论是统计方法的基础。
  - 桥接数学与应用科学
  - 几乎所有与数据有关的学科的语言
- 在保持一定的数学严谨性的前提下，重点强调统计方法在工程物理系相关学科中的应用。
  1. 如何根据物理目标完成实验的设计？
  2. 如何从实验数据中提取物理规律？
  3. 如何规范表述实验结果？

学习概率统计重在应用

- 统计方法是从大量（实验）数据中总结提取一般规律的必要手段，概率论是统计方法的基础。
    - 桥接数学与应用科学
    - 几乎所有与数据有关的学科的语言
- 在保持一定的数学严谨性的前提下，重点强调统计方法在工程物理系相关学科中的应用。
    1. 如何根据物理目标完成实验的设计?
    2. 如何从实验数据中提取物理规律?
    3. 如何规范表述实验结果?

大纲

- 随机事件与概率
- 随机变量及其分布
- 多维随机变量及其分布
- 随机变量的数字特征
- 蒙特卡罗方法
- 大数定律与中心极限定理
- 样本分布
- 参数估计
- 假设检验
- 方差分析
- 回归分析
- 随机过程
- 测量与不确定度

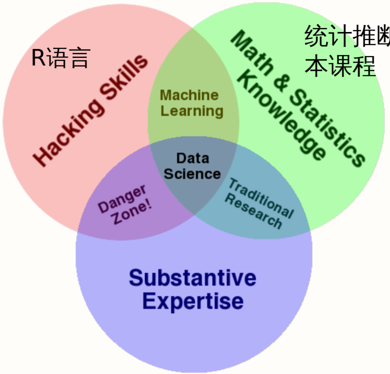
开课动机

为什么要学习概率统计分析？

1. 优良学风班考察班级学生平均绩点，人数不同的班级适合比较吗？
2. 买买买剁手时，不同的店家类似的商品，如何比选？
3. 拉普拉斯：如何把 Common Sense 用 Calculations 表达出来？

此课在知识体系中的地位：这是一个数据的时代

- 数据时代需要 黑客技术 Hacking Skills、 数理统计 Math & Statistics Knowledge 、 专业知识 Substantive Expertise 等多方面技能。

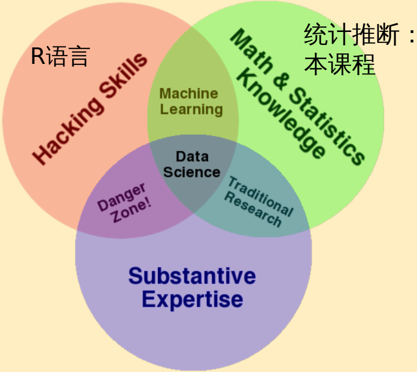


为什么要学习概率统计分析?

1. 优良学风班考察班级学生平均绩点，人数不同的班级适合比较吗?
2. 买买买剁手时，不同的店家类似的商品，如何比选?
3. 拉普拉斯：如何把 Common Sense 用 Calculations 表达出来?

此课在知识体系中的地位：这是一个数据的时代

- 数据时代需要 黑客技术 Hacking Skills、 数理统计 Math & Statistics Knowledge 、 专业知识 Substantive Expertise 等多方面技能。

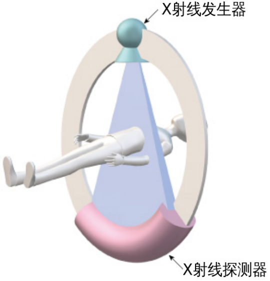


例：精密测量

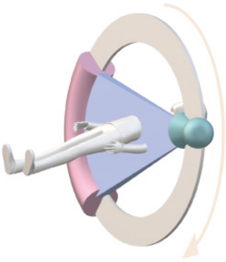
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



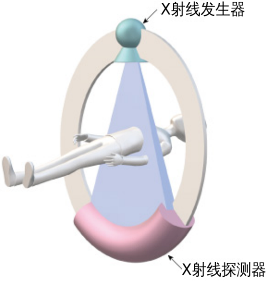
转动扫描



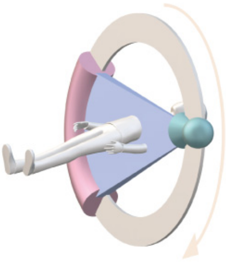
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



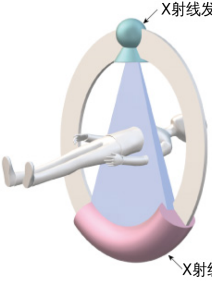
- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

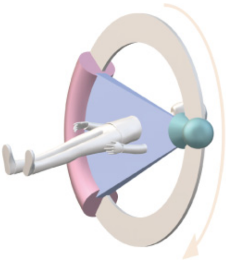
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

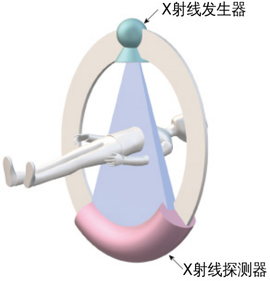
$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛

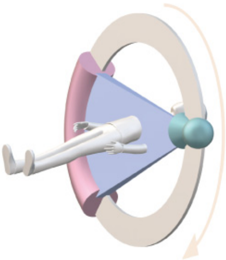
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线



转动扫描



- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

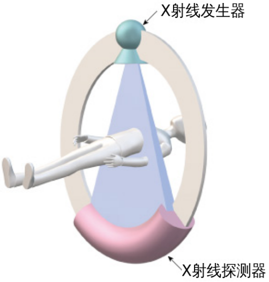
- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛

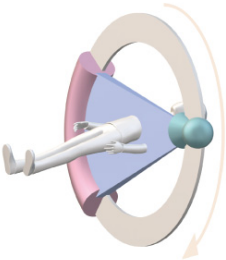
计算机断层扫描（Computed Tomography, CT）

CT 装置

X 射线

转动扫描





- 为了减少 X 射线辐射量，必须使用灵敏的探测器。

$$\text{X 射线} \xrightarrow{\text{闪烁体}} \text{可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

- 光电倍增管是检测极微弱光的器件，在科研与民生各领域应用广泛

光电倍增管（Photomultiplier Tube, PMT）的光子检测效率

PMT

微弱的可见光 $\xrightarrow{\text{光电倍增管}}$ 电信号

光子检测效率 一个光子击中 PMT 后被检测到的概率，表征 PMT 性能

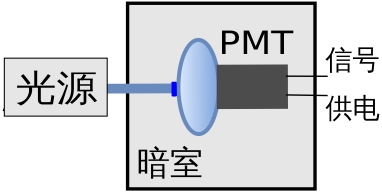
$$\frac{R_1\text{(实验目标)}}{R_0\text{(已知参考值)}} = \frac{D_1}{D_0}\text{(实验测量计数率)}$$

- PMT 工作在极微弱的光环境，测量时间长，光源稳定度不够

光电倍增管（Photomultiplier Tube, PMT）的光子检测效率

PMT

PMT 测量标定



微弱的可见光 $\xrightarrow{\text{光电倍增管}}$ 电信号

光子检测效率 一个光子击中 PMT 后被检测到的概率，表征 PMT 性能

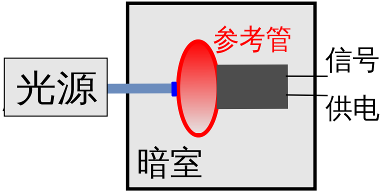
$$\frac{R_1\text{(实验目标)}}{R_0\text{(已知参考值)}} = \frac{D_1}{D_0}\text{(实验测量计数率)}$$

- PMT 工作在极微弱的光环境，测量时间长，光源稳定度不够

光电倍增管（Photomultiplier Tube, PMT）的光子检测效率

PMT

光源标定



$$\text{微弱的可见光} \xrightarrow{\text{光电倍增管}} \text{电信号}$$

光子检测效率 一个光子击中 PMT 后被检测到的概率，表征 PMT 性能

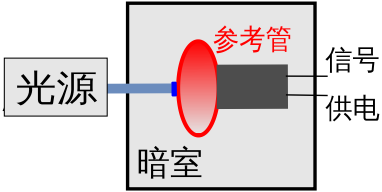
$$\frac{R_1\,(\text{实验目标})}{R_0\,(\text{已知参考值})} = \frac{D_1}{D_0}\,(\text{实验测量计数率})$$

- PMT 工作在极微弱的光环境，测量时间长，光源稳定度不够

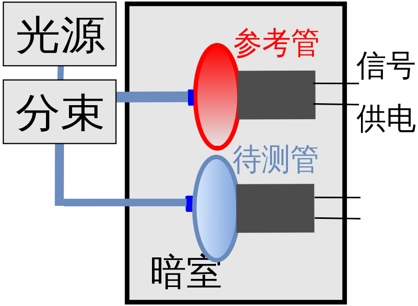
光电倍增管（Photomultiplier Tube, PMT）的光子检测效率

PMT

光源标定



分束测定



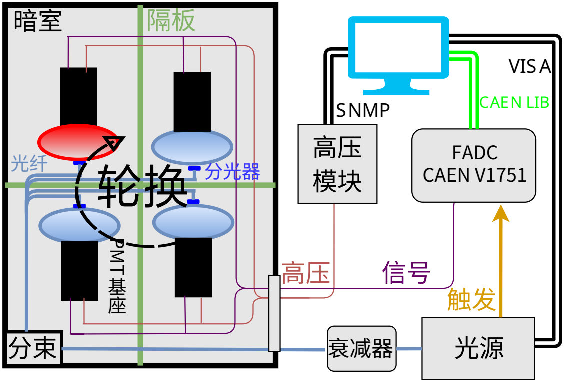
微弱的可见光 $\xrightarrow{\text{光电倍增管}}$ 电信号

光子检测效率 一个光子击中 PMT 后被检测到的概率，表征 PMT 性能

$$\frac{R_1\,\text{(实验目标)}}{R_0\,\text{(已知参考值)}} = \frac{D_1}{D_0}\,\text{(实验测量计数率)}$$

- PMT 工作在极微弱的光环境，测量时间长，光源稳定度不够

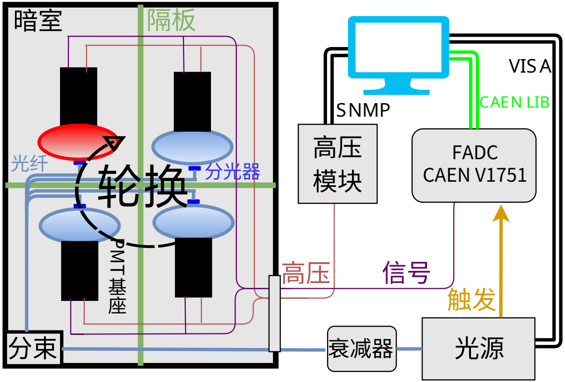
实际工作中测量光子检测效率



- 将参考管在四个暗室中轮换，同时测量四支 PMT 以降低统计误差
- 疑问：分束器是否均匀分光，使得四个暗室的光强一致？

Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment, NIM A, (1055)168506, 2023

实际工作中测量光子检测效率



- 将参考管在四个暗室中轮换，同时测量四支 PMT 以降低统计误差
- 疑问：分束器是否均匀分光，使得四个暗室的光强一致?

Performance evaluation of the 8-inch MCP-PMT for Jinping Neutrino Experiment, NIM A, (1055)168506, 2023

例：体温计

电子体温计

- 电子体温计使用方便

工作原理：金属氧化物热敏电阻

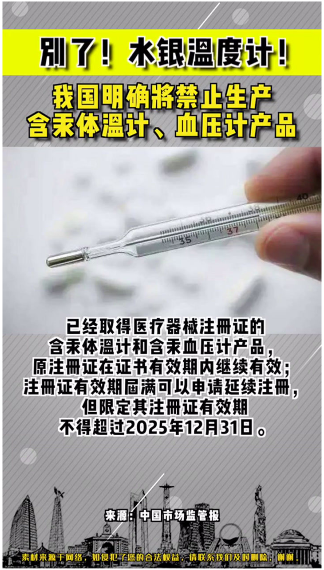
- 负温度系数型：随着温度升高，电阻值变小

电子体温计

- 电子体温计使用方便

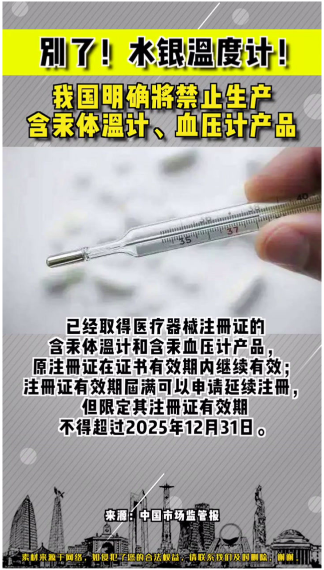
工作原理：金属氧化物热敏电阻

- 负温度系数型：随着温度升高，电阻值变小



电子体温计

- 电子体温计使用方便

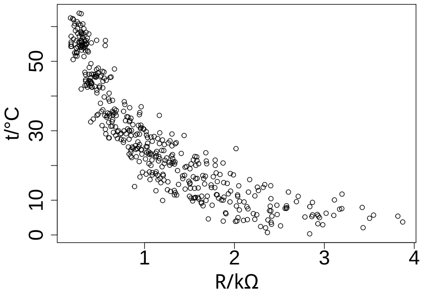


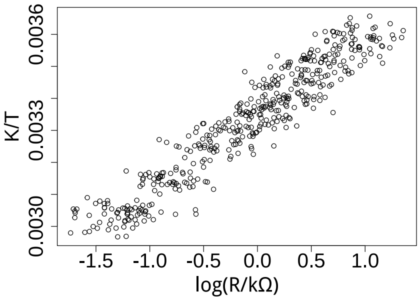
工作原理：金属氧化物热敏电阻

- 负温度系数型：随着温度升高，电阻值变小

热敏电阻的规律

```
d = read.table("thermister.csv", col.names=c("温度", "电阻"))
plot(温度 ~ 电阻, data=d, ylab="温度/C", xlab="电阻/Ohm")
```



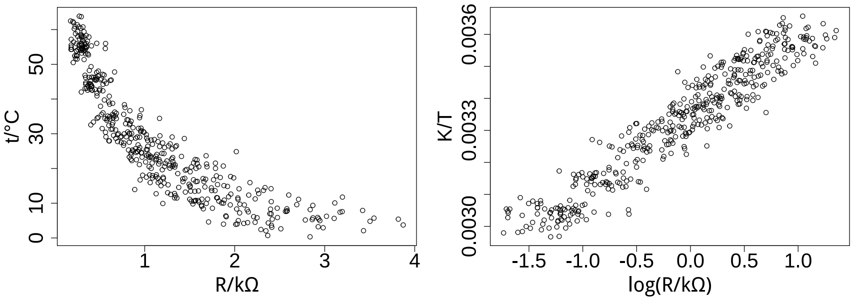



```
plot(1/(温度 + 273.15) ~ log(电阻), data=d, ylab="1/温度 [K]", xlab="log(电阻/[Ohm])")
```

- 温度与电阻值有对应关系
- 变成直线 $T \to \frac{1}{T+273.15}, R \to \log\frac{R}{[\Omega]}$

热敏电阻的规律

```r
d = read.table("thermister.csv", col.names=c("温度", "电阻"))
plot(温度 ~ 电阻, data=d, ylab="温度/C", xlab="电阻/Ohm")
```

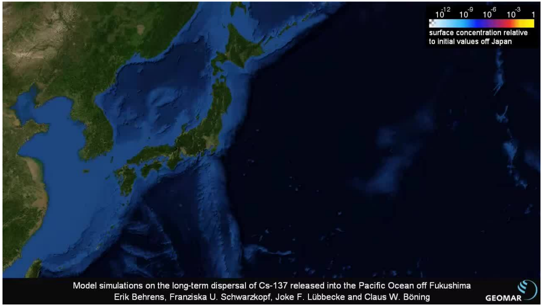



```r
plot(1/(温度 + 273.15) ~ log(电阻), data=d, ylab="1/温度 [K]", xlab="log(电阻/[Ohm])")
```

- 温度与电阻值有对应关系
- 变成直线 $T \to \dfrac{1}{T + 273.15}, R \to \log \dfrac{R}{[\Omega]}$

例：辐射计数

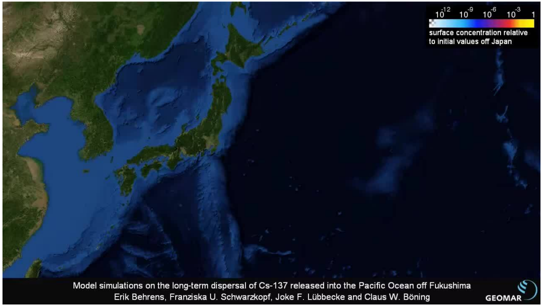
计数问题例子：盖革计数器的放射性计量



2023 年 8 月 24 日至 9 月 11 日，日本福岛第一核电站核污染水排海 7788 吨。
早在 2012 年德国海洋研究团队模拟了污水的扩散过程。

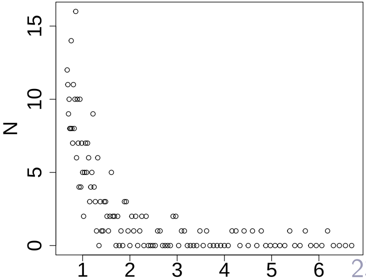
- 环境放射性，由探头计数测量
- 由计数反映辐射强度（为简便，设单位为 1）

计数问题例子：盖革计数器的放射性计量

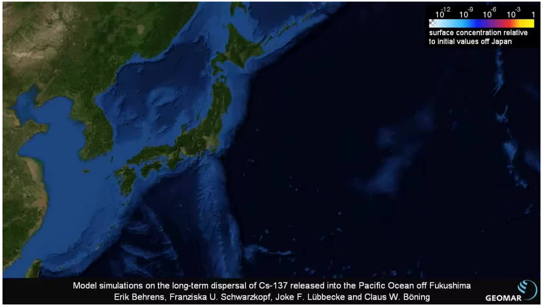


2023 年 8 月 24 日至 9 月 11 日，日本福岛第一核电站核污染水排海 7788 吨。
早在 2012 年德国海洋研究团队模拟了污水的扩散过程。

- 环境放射性，由探头计数测量
- 由计数反映辐射强度（为简便，设单位为 1）



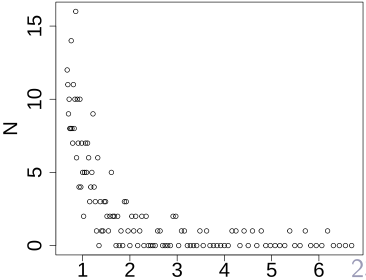
计数问题例子：盖革计数器的放射性计量



Model simulations on the long-term dispersal of Cs-137 released into the Pacific Ocean off Fukushima
Erik Behrens, Franziska U. Schwarzkopf, Joke F. Lübbecke and Claus W. Böning

2023 年 8 月 24 日至 9 月 11 日，日本福岛第一核电站核污染水排海 7788 吨。
早在 2012 年德国海洋研究团队模拟了污水的扩散过程。

- 环境放射性，由探头计数测量
- 由计数反映辐射强度（为简便，设单位为 1）
- 能否用线性模型描述?



例：雨量

北京 8 月降雨量

第 5 号“杜苏芮”台风残余造成北京及华北特大降雨

“北京有观测记录的 140 年以来第一大降雨”
——北京市气象局

北京 8 月降雨量

第 5 号“杜苏芮”台风残余造成北京及华北特大降雨

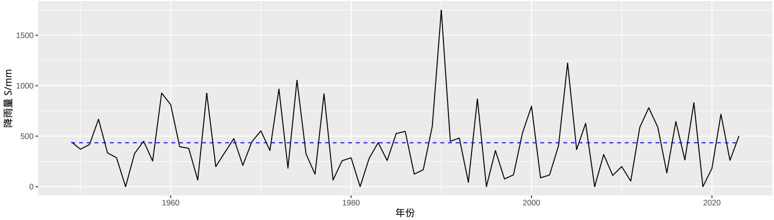
“北京有观测记录的 140 年以来第一大降雨”
——北京市气象局

结合自然灾害的预测进行决策

- 设北京 8 月的总降雨量为 S，是一个随机变量
  - 我们需要刻画 S 的特点，来掌握北京的降雨规律
- 随机变量 S 的期望 $\mathrm{E}(S)$：直观反映了北京 8 月的平均降雨量。

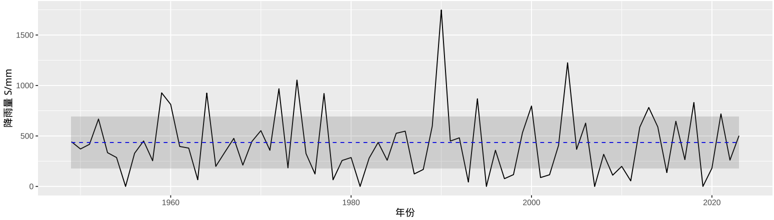
结合自然灾害的预测进行决策

- 设北京 8 月的总降雨量为 S，是一个随机变量
  - 我们需要刻画 S 的特点，来掌握北京的降雨规律
- 随机变量 S 的期望 $\mathrm{E}(S)$：直观反映了北京 8 月的平均降雨量。



结合自然灾害的预测进行决策

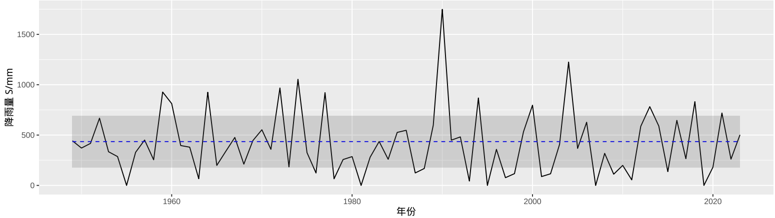
- 设北京 8 月的总降雨量为 S，是一个随机变量
  - 我们需要刻画 S 的特点，来掌握北京的降雨规律
- 随机变量 S 的期望 $\mathrm{E}(S)$：直观反映了北京 8 月的平均降雨量。



- 方差 $\mathrm{Var}(S)$ 与标准差：反映了北京 8 月的降雨量的年度变化。

结合自然灾害的预测进行决策

- 设北京 8 月的总降雨量为 S，是一个随机变量
  - 我们需要刻画 S 的特点，来掌握北京的降雨规律
- 随机变量 S 的期望 $\mathrm{E}(S)$：直观反映了北京 8 月的平均降雨量。



- 方差 $\mathrm{Var}(S)$ 与标准差：反映了北京 8 月的降雨量的年度变化。

问题

如何从经验的“平均”与“变化”，上升到理论上对雨量期望与方差的理解？

问题的条件概率分解

- 北京 8 月降雨量 S 服从什么分布?
- S 受两个因素的影响：
  1. 北京 8 月的降雨次数 N – 计数：离散型随机变量
  2. 各 (i) 次下雨的降雨量 R_i，独立同分布 – 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响
  2. 当 N 确定时，单次雨量对总雨量的影响

问题的条件概率分解

- 北京 8 月降雨量 S 服从什么分布?
- S 受两个因素的影响：
  1. 北京 8 月的降雨次数 N – 计数：离散型随机变量
  2. 各 (i) 次下雨的降雨量 R_i，独立同分布 – 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响
  2. 当 N 确定时，单次雨量对总雨量的影响

问题的条件概率分解

- 北京 8 月降雨量 S 服从什么分布？
- S 受两个因素的影响：
  1. 北京 8 月的降雨次数 N – 计数：离散型随机变量
  2. 各 (i) 次下雨的降雨量 R_i，独立同分布 – 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响
  2. 当 N 确定时，单次雨量对总雨量的影响

问题的条件概率分解

- 北京 8 月降雨量 S 服从什么分布？
- S 受两个因素的影响：
  1. 北京 8 月的降雨次数 N – 计数：离散型随机变量
  2. 各 (i) 次下雨的降雨量 R_i，独立同分布 – 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响
  2. 当 N 确定时，单次雨量对总雨量的影响

问题的条件概率分解

- 北京 8 月降雨量 S 服从什么分布?
- S 受两个因素的影响：
  1. 北京 8 月的降雨次数 N – 计数：离散型随机变量
  2. 各 (i) 次下雨的降雨量 R_i，独立同分布 – 非负的连续型随机变量

$$S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- 拆解成两个子问题：
  1. 降雨次数 N 对总雨量 S 的影响
  2. 当 N 确定时，单次雨量对总雨量的影响

例：核弹

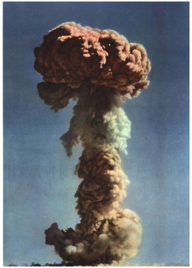
《马兰花开》两弹的研发

《马兰花开》剧照、脚本

钱学森：咱们搞科学的，容不得半点马虎啊。
 \cdots \cdots
理论组：老邓，第八次计算结果与第九次完全吻合!

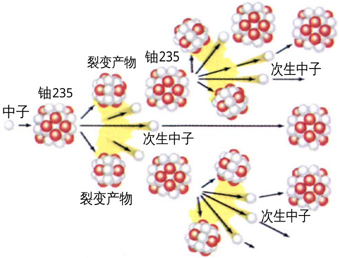
邓稼先：中国的第一颗原子弹，就从这里开始吧!

九次计算耗时半年，
最终结果一致



- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴 随机 性
- 中子在介质里输运被 随机 散射损耗能量
- 最终得到 确定 的“试爆成功”结果

要掌握和运用核物理，需要大量的 计算



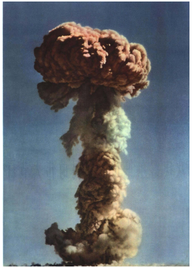
《马兰花开》两弹的研发

《马兰花开》剧照、脚本

钱学森：咱们搞科学的，容不得半点马虎啊。
\cdots   \cdots
理论组：老邓，第八次计算结果与第九次完全吻合！

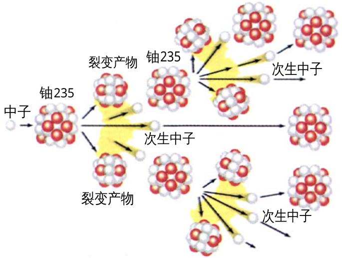
邓稼先：中国的第一颗原子弹，就从这里开始吧！

九次计算耗时半年，
最终结果一致



- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴 随机 性
- 中子在介质里输运被 随机 散射损耗能量
- 最终得到 确定 的 “试爆成功” 结果

要掌握和运用核物理，需要大量的 计算



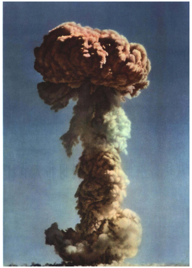
《马兰花开》两弹的研发

《马兰花开》剧照、脚本

钱学森：咱们搞科学的，容不得半点马虎啊。
\cdots \cdots
理论组：老邓，第八次计算结果与第九次完全吻合！

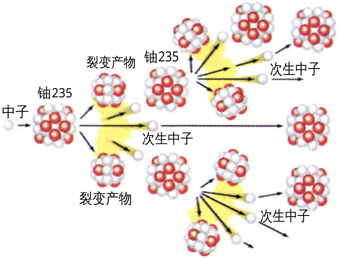
邓稼先：中国的第一颗原子弹，就从这里开始吧！

九次计算耗时半年，
最终结果一致



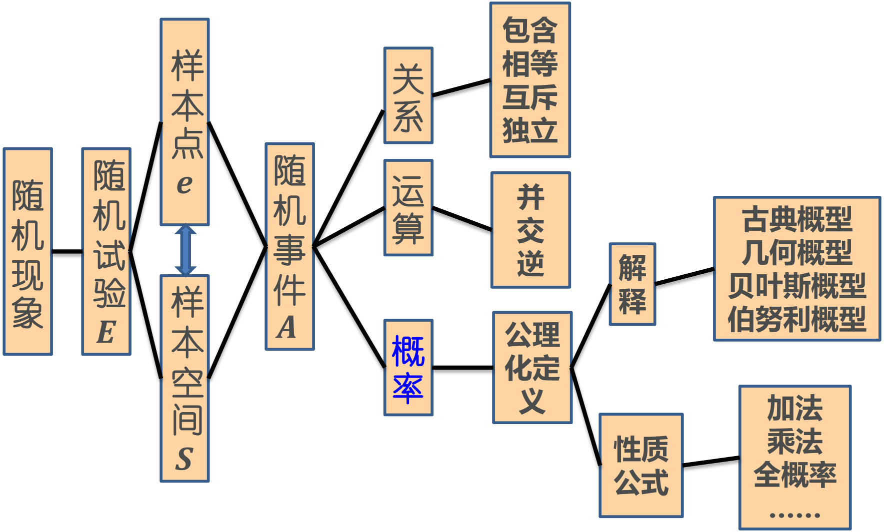
- 核裂变链式反应过程复杂，各步伴 随机 性
- 中子在介质里输运被 随机 散射损耗能量
- 最终得到 确定 的“试爆成功”结果

要掌握和运用核物理，需要大量的 计算



概念地图

随机现象与概率的概念框图



随机事件

随机现象

在一定的条件下，并不总出现相同结果的现象称为随机现象。

- 结果不止一个
- 不确定性：试验前不能预知会出现哪个结果
- 统计规律：随机现象的各种结果会表现出一定的统计规律性。

随机试验

试验 对某事物特征进行观察

随机试验 在可重复条件下对随机现象进行的试验，记以 E

- 可在相同的条件下重复进行
- 试验结果不止一个
- 试验前不能预知出现哪种结果

样本

样本点 随机试验 E 的每一个可能的基本结果，记为 e。

样本空间 随机试验 E 所有样本点组成的集合，记为 S。

$$S = \{e\}$$

离散样本空间 样本点的个数为有限个或可列个。

连续样本空间 样本点的个数为不可列个。

样本空间也常记为 $\Omega = \{\omega\}$，其中 ω 为样本点。

样本空间

- 样本空间中的元素可以是数，也可以不是数。样本空间至少有两个样本点。
- 样本空间是研究随机现象的抽象数学模型，我们总是假定样本空间已知。
- 正确确定样本点和样本空间对于研究随机现象至关重要。

例：给出一组随机试验及相应的样本空间

- E_1 将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

$$S_1 = \{0, 1, 2, 3\}$$

  离散样本空间
- E_2 记录北京市 120 急救电话台一昼夜接到的呼叫次数。

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

  离散样本空间
- E_3 不稳定原子核的寿命。

$$S_3 = (0, +\infty)$$

  连续样本空间

随机事件

随机事件 由随机试验 E 部分样本点组成的集合。

- 简称事件。是样本空间 S 的子集，常用 A, B, C 等表示。

$$A \subset S$$

基本事件 仅由一个样本点组成的子集 $\{e_0\} \subset S$，即 S 的单点集。

两个特殊事件

必然事件 全体样本点组成的事件 S，每次试验必定发生的事件

不可能事件 不包含任何样本点的事件，记为 $\emptyset$，每次试验必定不发生的事件

例：抛硬币

将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况，给出样本空间。

解

$$S = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$$

- 基本事件为 8 个
- 事件 A_1：“第一次出现的是 H”，即

$$A_1 = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{HTT}\}$$

- 事件 A_2：“三次出现同一面”，即

$$A_2 = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{TTT}\}$$

例：抽奖券

一千张奖券中任意抽取一张，有多少个基本事件？任意抽取二张有多少基本事件？

解

- 任意抽取一张，则有 1000 个基本事件。
- 任意抽取二张，则应是从 1000 个中抽取 2 个的组合数。

$$\binom{1000}{2} = 499500$$

事件的运算

随机事件与集合

- 随机试验中事件 A 中某个样本点发生了，称“事件 A 发生了”或“事件 A 出现了”，记为 A。
- 由于事件是样本空间中样本点的集合，所以可以用集合表示，并且事件之间的 关系 和 运算 与 集合论 中集合的关系和运算相同。
- 事件间的关系：包含、相等、互斥
- 事件间的运算：和 (并)、积 (交)、差、逆 (对立)

事件间的关系

包含 $A \subset B$，A 发生必然导致 B 发生。

相等 $A = B$

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

互斥 又称“互不相容”，A 和 B 不可能同时发生。

$$A \cap B = \emptyset$$

事件间的运算

- 和（并）：事件 A 与 B 至少有一个发生，记作

$$A \cup B \text{或者} A + B$$

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生，记作

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

事件间的运算

- 积（交）：“A 与 B 同时发生”，记作

$$A \cap B = AB$$

  n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，记作 $A_1A_2\cdots A_n$
- 差：

$$A - B\text{或者}A \setminus B$$

  称为 A 与 B 的差事件，表示事件 A 发生而 B 不发生

思考

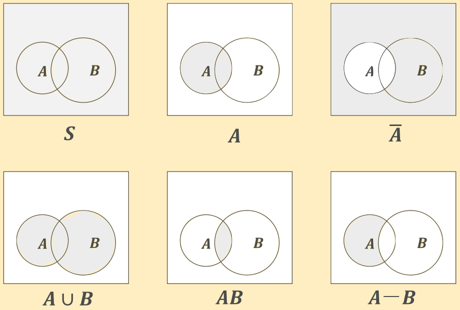
- 何时 $A - B = A$?
- 何时 $A - B = \emptyset$?

事件间的运算

- 逆（对立）$\overline{A}$ 称为事件 A 的逆或对立，表示 A 不发生。

$$A+\overline{A}=S, A\overline{A}=\emptyset$$

图示事件间的关系和运算：文氏图



复习：集合论运算律

在进行运算时，经常要用到下述定律。设 A, B, C 为事件，

交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

德・摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

对于 n 个事件，甚至对于可列个事件，德・摩根律也成立。德・摩根定律也称为对偶律

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

思考：

1. 为什么自然数只有乘法分配律，但是集合运算同时有乘法与加法的分配律?
2. n 为可数无穷和不可数无穷时，德・摩根是否成立?

联系助教回答问题，答对者总评 $+1\%$

术语对比

记号	概率论	集合论
S	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
e	样本点	元素
$A \subset B$	A 发生必然导致 B 发生	A 是 B 的子集
$AB = \emptyset$	A 与 B 互不相容	A 与 B 无相同元素
$A \cup B$	A 与 B 至少有一发生	A 与 B 的并集
AB	A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	A 发生且 B 不发生	A 与 B 的差集
$\overline{A}$	A 不发生、对立事件	A 的余集

常用性质

- 基本事件互斥，基本事件的并为 S

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \qquad A \cup \bar{A} = S$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap S = A \qquad A \cup S = S$$

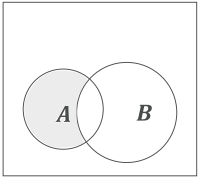
$$\emptyset \subset AB \subset \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \subset A \cup B \subset S$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, AB = A$$

$$A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B - AB)$$

$$A = AB \cup A\bar{B}$$

$$A - B = A\bar{B}$$
$$A - B = A - AB$$



$A - B$

样本空间的分割

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：

1. 两两互斥，
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 S 的一组分割。也称为一个划分。

例

设 A, B, C 为三个事件，试用事件的运算表示下列事件

1. A 发生而 B 与 C 都不发生：
2. 所有这三个事件都发生：
3. 三个事件恰好发生一个：
4. 这三个事件至少发生一个：

化简下列式子

1. $(A+B)(A+\overline{B})$
2. $(A+B)(B+C)$

证明

$$(A-B)\cup(B-A)=\overline{(AB)\cup(\bar{A}\bar{B})}$$