

清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：锦屏百吨实验 PMT 排布研究

系 别：工程物理系

专 业：工程物理专业

姓 名：齐博涵

指导教师：续本达 助理教授

2021 年 6 月 7 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名： 齐博远 导师签名： 续李达 日 期 2021.6.7

中文摘要

在液体闪烁体探测器中,光电倍增管(PMT)的排布决定了事例重建的效果。文章提出了基于斐波那契网格的PMT排布方法,利用球谐函数法在锦屏一吨原型机上进行了模拟和重建,论证了斐波那契网格排布性能优于现有的锦屏一吨原型机排布。同时研究了PMT排布对重建结果的影响,给出探测器分辨率与PMT排布的定量关系,为锦屏中微子实验百吨探测器的PMT排布提供了可行思路。

关键词: 光电倍增管; 斐波那契网格; 锦屏一吨原型机; 球谐函数重建

ABSTRACT

The arrangement of photomultiplier tube (PMT) is capable to determine event reconstruction result in liquid scintillator detectors. A PMT arrangement method based on Fibonacci grid is proposed. Simulation and reconstruction by spherical harmonic method on Jinping 1-ton prototype is executed, demonstrates that Fibonacci grid arrangement is superior to prior arrangement of Jinping 1-ton prototype. Meanwhile, the influence of PMT arrangement on reconstruction result is studied, the quantitative relation between detector resolution and PMT arrangement is calculated, which provides a feasible solution for PMT arrangement of the hundred-ton detector in the future Jinping Neutrino Experiment.

Keywords: photomultiplier tube (PMT); Fibonacci grid; Jinping 1-ton prototype; spherical harmonic reconstruction

目 录

第 1 章 引 言	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 锦屏中微子实验	1
1.1.2 锦屏一吨原型机	1
1.2 研究内容	2
第 2 章 球谐函数重建	5
2.1 模型建立	5
2.2 电荷：泊松回归	6
2.3 似然函数	8
2.4 锦屏一吨原型机重建结果	8
第 3 章 斐波那契排布重建	13
3.1 斐波那契网格	13
3.2 斐波那契网格重建	15
3.3 PMT 排布衡量指标	19
3.3.1 PMT 最小标准差	20
3.3.2 PMT 最小聚类数	22
3.3.3 PMT 到轴最大距离	25
3.3.4 全反射区域 PMT 最小数量	27
3.4 重建结果分析	31
3.5 重建结果小结	33
第 4 章 百吨探测器 PMT 排布	34
4.1 一吨原型机改良	34
4.2 百吨探测器重建	40
第 5 章 结 论	45
插图索引	46
参考文献	48

致 谢.....	50
声 明.....	51
附录 A 外文资料的调研阅读报告.....	52

主要符号表

PMT	光电倍增管 (photomultiplier tube)
PE	光电子 (photoelectron)
TIR	全反射, 全内反射 (total internal reflection)
Std	标准差 (standard deviation)
Bias	标准偏差

第 1 章 引 言

1.1 研究背景

1.1.1 锦屏中微子实验

中国锦屏地下实验室 (China Jinping Underground Laboratory, CJPL) 位于四川省雅砻江锦屏山, 以其埋深 2 400 m 的优良条件, 具有最低的反应堆中微子和环境本底、最大的地球中微子信号、最长的太阳中微子过地距离等得天独厚的优势。目前锦屏一期实验 (CJPL I) 已经运行, 锦屏二期工程 (CJPL II) 正在建设中^[1]。CJPL II 规划建造百吨级大型中微子探测器开展中微子实验, 在地球中微子、太阳中微子等物理学前沿课题进行研究。

1.1.2 锦屏一吨原型机

为研究锦屏中微子实验涉及的液体闪烁体性能、中微子探测技术、低本底环境等, 在锦屏地下实验室中建造了一个小型原型机, 其核心部件包括 1 吨液体闪烁体 (后文简称液闪; liquid scintillator, LS) 和 30 个光电倍增管 (photomultiplier tube, PMT), 结构如图 1.1 所示。^[2]

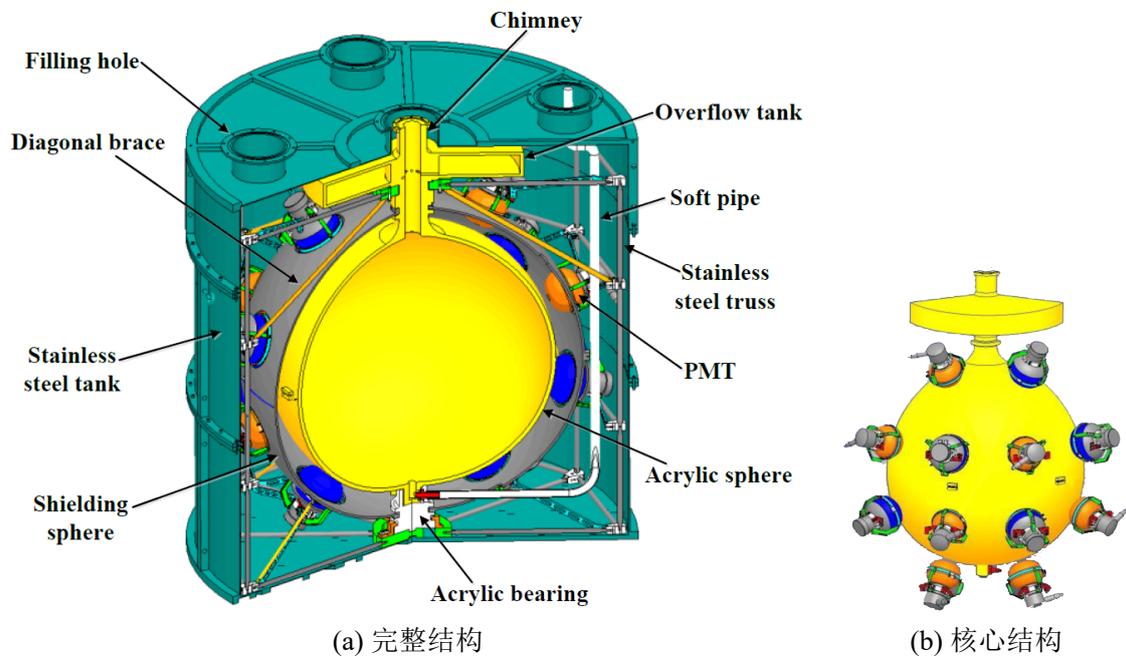


图 1.1 锦屏一吨原型机结构示意图

锦屏一吨原型机的液体闪烁体由一半径 $R = 0.645 \text{ m}$ 的亚克力球壳盛放。30

个 8 英寸 PMT 被安装在半径为 0.775 m 的黑色粗糙表面的亚克力球壳上，这一球壳颜色为黑色以减少反射，两层球壳中间充满纯净水以屏蔽钢架支撑结构和环境本底。PMT 中心的排布半径为 $R_s = 0.832$ m，PMT 最前端到黑色亚克力球壳距离仅为 7 cm。PMT 从上至下分为 4 层，每层均匀排布：最上和最下两层各 5 个，距探测器中心平面高度为 0.7 m；中间两层各 10 个，距探测器中心平面高度为 0.245 m。每个 PMT 都正对探测器中心。

液体闪烁体的折射率约为 1.48，而水的折射率约为 1.33。探测器内光线从液体闪烁体斜射入水层时，若入射角大于临界角，则光线将全部被反射回液体闪烁体而不进入水层，这一现象称为全反射 (或全内反射；total internal reflection, TIR)。经计算可得，球形探测器里全反射发生的临界半径 $r = \frac{1.33}{1.48} R \approx 0.90R$ ，实际物理过程中临界半径会由于光子波长不同而有所变化。

探测器的典型工作流程为：粒子 η 于时间 t 在探测器内位置 \vec{r} 处与液体闪烁体作用沉积能量 E ，液体闪烁体吸收能量跃迁至激发态，而后退激发出荧光。光子经传播后射入 PMT 的光学窗，在 PMT 的光阴极上经光电效应转换为光电子 (photoelectron, PE)。光电子经 PMT 的电子倍增系统 (打拿极) 倍增，最终经电子学设备输出为电压波形^[3]。探测器对单个粒子的响应称为一个事例 (event)。

实际研究所用的数据并未来自锦屏一吨原型机原始数据，而是由 JSAP 模拟生成。JSAP (锦屏中微子实验仿真与分析包, Jinping Neutrino Experiment Simulation & Analysis Package) 是一个基于 GEANT4^[4] 和 ROOT^[5] 开发的、通过蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真生成探测器模拟数据的程序。借助于预设的探测器结构与物理过程参数，JSAP 可以生成具有特定初始位置、能量、动量和时间信息的粒子并模拟其物理过程。后文的研究也并非从原始数据出发，而是基于 MC 真值电荷、时间等 PMT 响应信息已知的前提进行。图 1.2 是 JSAP 对锦屏一吨原型机的模拟模型。

1.2 研究内容

PMT 的排布对探测器内的事例重建具有重要意义，然而在目前的大型中微子探测器建设中，缺少对于 PMT 排布的指导方法。

目前世界上建成和在建的大型探测器主要分为两类：球形探测器和圆柱形探测器。由于已建的锦屏一吨原型机和设计中的锦屏百吨探测器均为球形探测器，因此主要关注大型球形探测器的 PMT 排布，如 JUNO^[6]，SNO^[7]，Borexino^[8]，KamLAND^[9] 等，如图 1.3 所示。

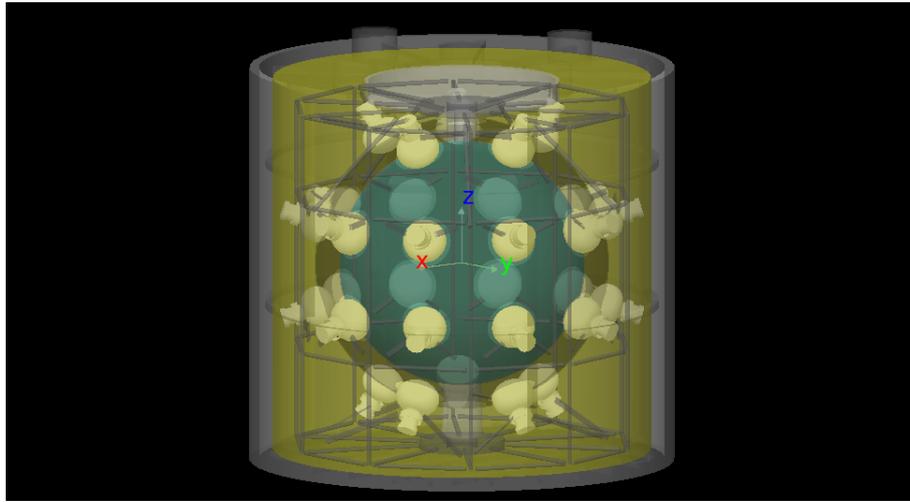


图 1.2 JSAP 对锦屏一吨原型机的模拟模型

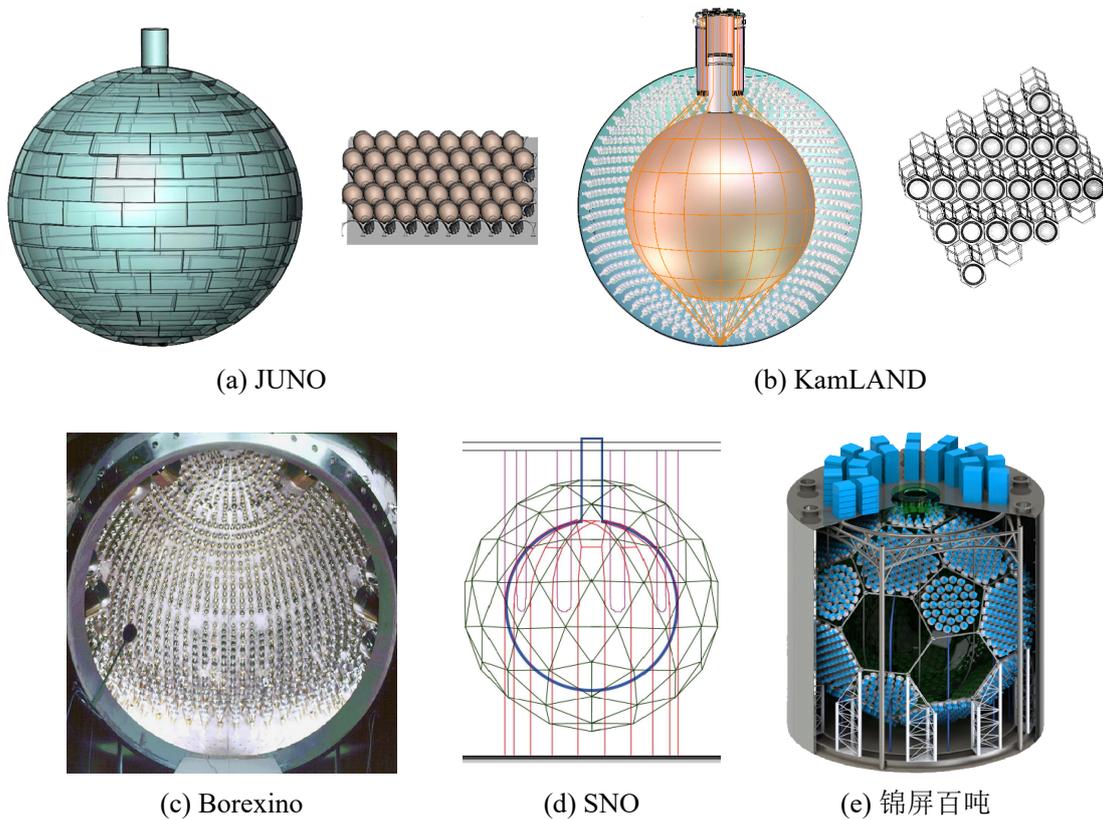


图 1.3 大型探测器中 PMT 排布方式

大量 PMT 的排布通常采用两种方法：一种是规则环状排布，如 JUNO、KamLAND 的正六边形网格、Borexino 的环形阵列等；另一种是多面体层次网格，如 SNO 的由三角形构成的多面体等。与此同时，各种排布都需要兼顾模块化施工、探测器支撑结构等工程需要而对 PMT 排布作出调整。

本文从锦屏一吨原型机的研究结果出发，探究 PMT 排布对重建结果的影响，进而优化 PMT 排布，为在建的百吨探测器提供可行思路。

- 第 2 章介绍了球谐函数重建法，利用 Legendre 多项式进行回归，利用电荷与时间信息对顶点位置进行重建。
- 第 3 章引入斐波那契网格，从多个角度对比斐波那契网格 PMT 排布和传统 PMT 排布下的重建结果，并分析 PMT 排布对重建结果的影响。
- 第 4 章研究了一吨原型机和百吨探测器的 PMT 排布重建，给出百吨探测器的重建结果与 PMT 排布的指导方案。
- 第 5 章对现有工作进行了总结，指出现存不足和未来期望。

第 2 章 球谐函数重建

假定事例是一点源，具有能量 E 、位置 \vec{r} 、时间 t 的事例通过探测器实际物理过程或计算机模拟，可以在各个 PMT 上生成 PE 数 n_i 、击中时间 $[t_i]$ 。反过来，通过 n_i 、 $[t_i]$ 还原 E 、 \vec{r} 、 t 的过程即为事例重建 (event reconstruction)。由于能量 E 和时间 t 的重建都依赖于位置 \vec{r} ，因此后文研究将仅关注位置重建。

球谐函数重建^[10]的核心是利用 Legendre 函数，将 PMT 对任意位置顶点的 PE 数和时间响应期望作多项式回归 (regression)，然后构造似然函数，通过最大似然估计 (maximum likelihood estimation, MLE) 重建顶点位置，进而获取能量与时间信息。球谐函数法兼顾了分辨率与运行速度，并且在全反射区域有比电荷加权平均法^[11]更好的表现。

2.1 模型建立

探测器中，顶点的三维坐标可以由 $\vec{r}(r, \theta, \phi)$ 唯一确定。而在球形探测器中，由于旋转对称性的存在，顶点对 PMT 的响应可以由相对位置 $\vec{r}(r, \theta)$ 唯一确定，其中 θ 为顶点与 PMT 相对球心的夹角， \vec{x}_i 表示第 i 个 PMT 坐标，如图 2.1 所示。坐标表示的简化可以减少不必要的自由度，避免过拟合，同时将自然坐标系受边界的非线性约束改为线性约束。

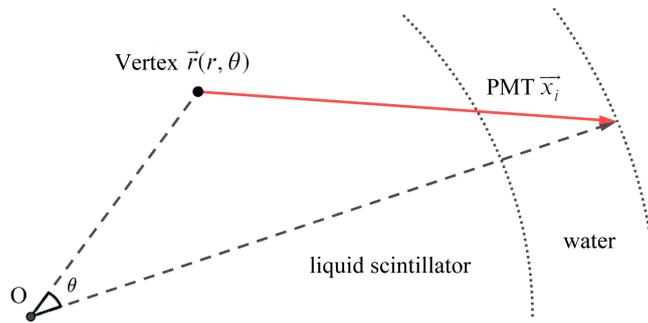


图 2.1 顶点 $\vec{r}(r, \theta)$ 与 PMT \vec{x}_i 相对位置

使用 Legendre 函数作为多项式回归的基底。 l 阶 Legendre 多项式 $P_l(x)$ 有递推形式

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$
$$(l + 1)P_{l+1}(x) - (2l + 1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots)$$

作 0~5 阶 Legendre 多项式 ($x \in [-1, 1]$) 如图2.2所示。

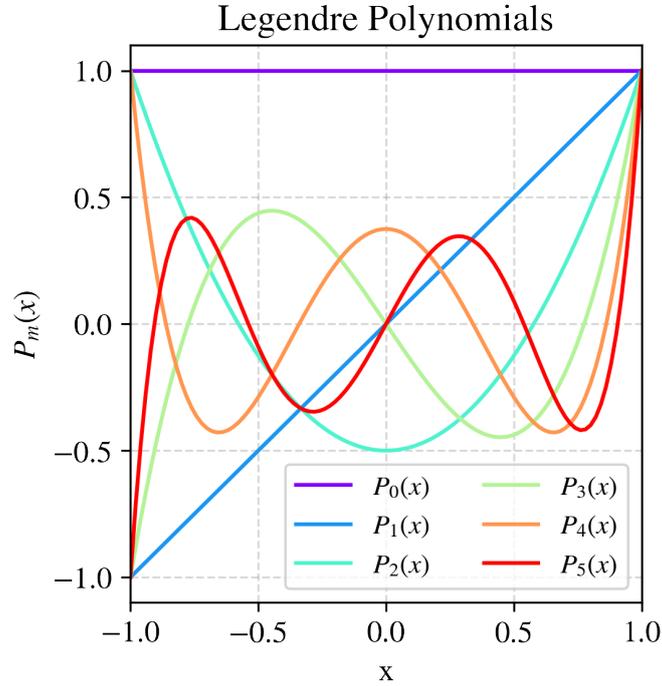


图 2.2 Legendre 多项式

Legendre 多项式经常被用作球面基函数，其在 $[-1, 1]$ 上正交、对称、有界，同时变化不至于过于剧烈，使得高阶 Legendre 多项式可以用于刻画函数的微小变化。这些都满足对球探测器上多项式基的期望。

2.2 电荷：泊松回归

从顶点发射的光子会在探测器内发生复杂的反射与折射，但无论光路如何，PMT \vec{x}_i 上接收到的 PE 数 n_i 总服从参数为 N_i 的泊松分布 (Poisson distribution)

$$f_{\text{PE}}(n_i | N_i) = \exp(-N_i) \frac{N_i^{n_i}}{n_i!} \quad (2-1)$$

N_i 也就是该 PMT 上 PE 数的期望 $\mathbb{E}_{\text{PE}}(n_i)$ 。可以对由顶点 $\vec{r}(r, \theta)$ 在 PMT \vec{x}_i 上产生的 PE 数的期望的对数 $\ln N_i$ 作 Legendre 多项式回归

$$\ln N_i(r, \theta) = \sum_{l=0} \lambda_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (2-2)$$

这里不直接对 N_i 而是对 $\ln N_i$ 作多项式展开的原因是， n_i 的分布属于指数分布族 (exponential family)，取对数使其变为线性，进而可以使用广义线性模型 (gen-

eralized linear model) 进行回归。这一回归方式称为泊松回归 (Poisson regression)。

继续对 l 阶 Legendre 多项式的系数 $\lambda_l(r)$ 作 Legendre 多项式回归, 这一回归模型被称为变系数模型 (varying-coefficient model)^[12]

$$\lambda_l(r) = \sum_{m=0}^l \mu_{lm} P_m(r') \quad (2-3)$$

其中 r' 为归一化半径。如此一来, 就可以计算 PMT \bar{x}_i 对任意位置顶点 $\vec{r}(r, \theta)$ 响应的 PE 数期望 N_i 。

图2.3给出了 0~5 阶 Legendre 系数 $\lambda_l(r)$ 随归一化半径 r' 的变化, 虚线表示全反射区域边界 $r' = 0.9$ 。其中可以看出, 全反射区域系数变化剧烈, 意味着全反射区域具有和内部差别巨大的表现。

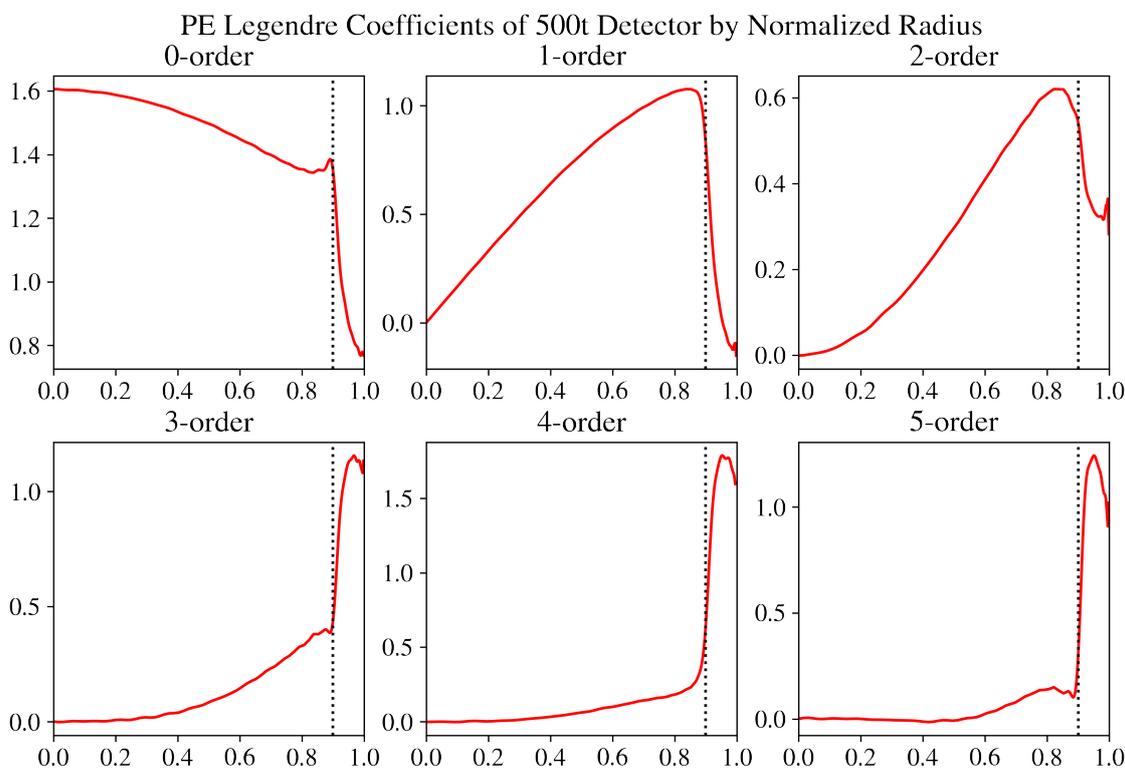


图 2.3 一吨原型机中 $\lambda_l(r)$ ($l = 0, 1, \dots, 5$) 随归一化半径 r' 的变化

图2.4给出了 PE 数期望 E_{PE} 随顶点相对 PMT 位置 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布, 其中假设 PMT 位于 $(R_s, 0^\circ)$ 处。

从上图中可以看出, 模板在探测器内部某些区域以及探测器边界并不平滑, 意味着在这些区域里可能存在相当多的局部极值影响重建结果。

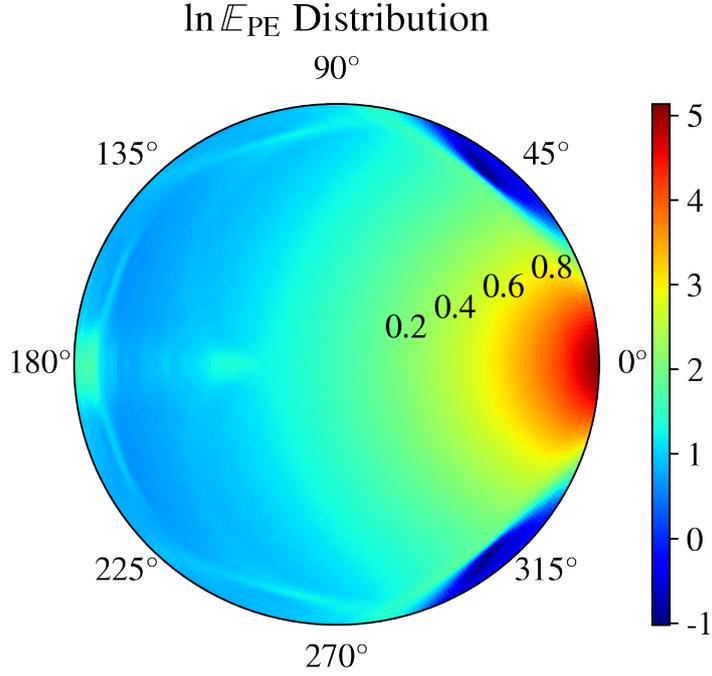


图 2.4 一吨原型机中 $\ln E_{PE}$ 随 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布

2.3 似然函数

对于电荷，在已知各 PMT 接收到的 PE 数 n_i 的前提下，似然函数 (likelihood) \mathcal{L}_{PE} 可以表达为

$$\mathcal{L}_{PE} = \prod_i \exp(-N_i) \frac{N_i^{n_i}}{n_i!} \quad (2-4)$$

对上式做变形

$$\ln \mathcal{L}_{PE} = \sum_i (-N_i + n_i \ln N_i - \ln n_i!) = \sum_i (-N_i + n_i \ln N_i) - \sum_i \ln n_i!$$

上式第二项求和项是常数，因此

$$\vec{r} = \arg \max \sum_i [-N_i(\vec{r}) + n_i \ln N_i(\vec{r})] \quad (2-5)$$

即为所求。

2.4 锦屏一吨原型机重建结果

图2.5是锦屏一吨原型机的 PMT 排布（后文简称为 Jinping 排布）在坐标系中的示意图。可以看出，x、y 轴方向上 PMT 对称性较高，同时排布相对密集；z 轴

方向上 PMT 对称性最高，根据旋转对称性等效于只有 4 个位置的 PMT 接收到了有效信息，且轴末端 PMT 排布相对稀疏、与轴距离较大。因此认为 x、y、z 轴是 Jinping 排布中较为特殊的三条轴。

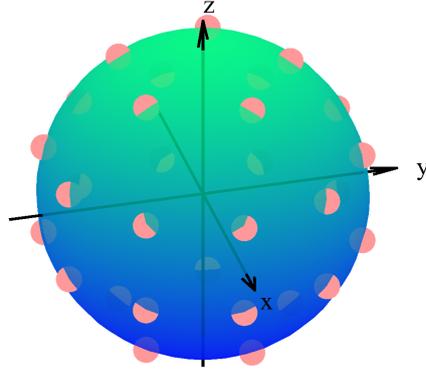


图 2.5 Jinping 排布示意图

对一吨原型机在这三条轴上模拟事例并重建，模拟条件为从原点起，沿轴每隔 0.01 m 生成 10000 个事例，能量为 2 MeV，光产额为 4 245 /MeV。对模拟真值与重建结果作二维直方图，横轴为真值半径在重建轴上的投影（后文简称为真值半径），纵轴为重建半径在重建轴方向的投影：

$$r_{j,\text{Truth}} = \vec{r}_{j,\text{Truth}} \cdot \vec{n}_{\text{Truth}}, \quad r_{j,\text{Proj}} = \vec{r}_{j,\text{Recon}} \cdot \vec{n}_{\text{Truth}}$$

其中 \vec{n}_{Truth} 即为重建轴。

x、y、z 方向上的重建坐标可以看作符合 PDF (probability density function, 概率密度函数) 为 $f(x)$ 的全同分布，因而重建半径 r_{Recon} 符合 PDF 为 $f(x^2 + y^2 + z^2)$ 的分布。随机变量的平方导致了在 0 m 附近，重建结果是正负半轴结果的叠加。如果直接使用重建半径而非重建半径的投影计算的 Std 和 Bias，0 m 附近将有较大的 Bias，无法如实反映探测器中心区域重建结果；使用重建半径在真值半径方向的投影进行计算，可以更好地衡量重建位置相对真值的准确性，同时可以展现出整条轴上的重建结果而非仅有正半轴。Std 和 Bias 的结果如图 2.6 所示。

在半径对比图中，二维直方图的颜色在色条 (colorbar) 中对应着重建事例数目。图形在不同真值半径处均有一定宽度，上下宽度越窄，代表重建结果的分辨率越好；图形整体上成一对角形状，与对角线走势越相符，代表重建结果与真值的偏差越小。

使用标准差 Std 和偏差 Bias 对结果进行量化，其计算公式为

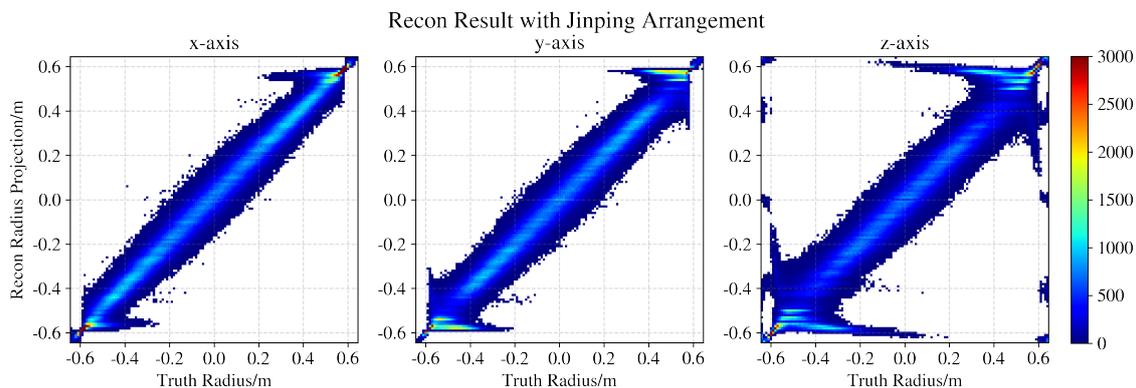


图 2.6 Jinping 排布在 x、y、z 轴上的重建结果（未截断）

$$\text{Std}(r) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_j^n (r_{j,\text{Proj}} - \bar{r}_{j,\text{Proj}})^2} \quad (2-6)$$

$$\text{Bias}(r) = \frac{1}{n} \sum_j^n (r_{j,\text{Proj}} - r_{j,\text{Truth}}) \quad (2-7)$$

同样地，这里使用重建半径的投影而非重建半径，可以更好地反映重建结果的统计性质。 Std 反映重建值的离散程度，用于表示重建结果的分辨率， Std 越低，分辨率越高； Bias 反映重建值与真实值的偏差程度， Bias 越低，重建结果越准确。

重建结果的 Std 和 Bias 如图2.7所示。

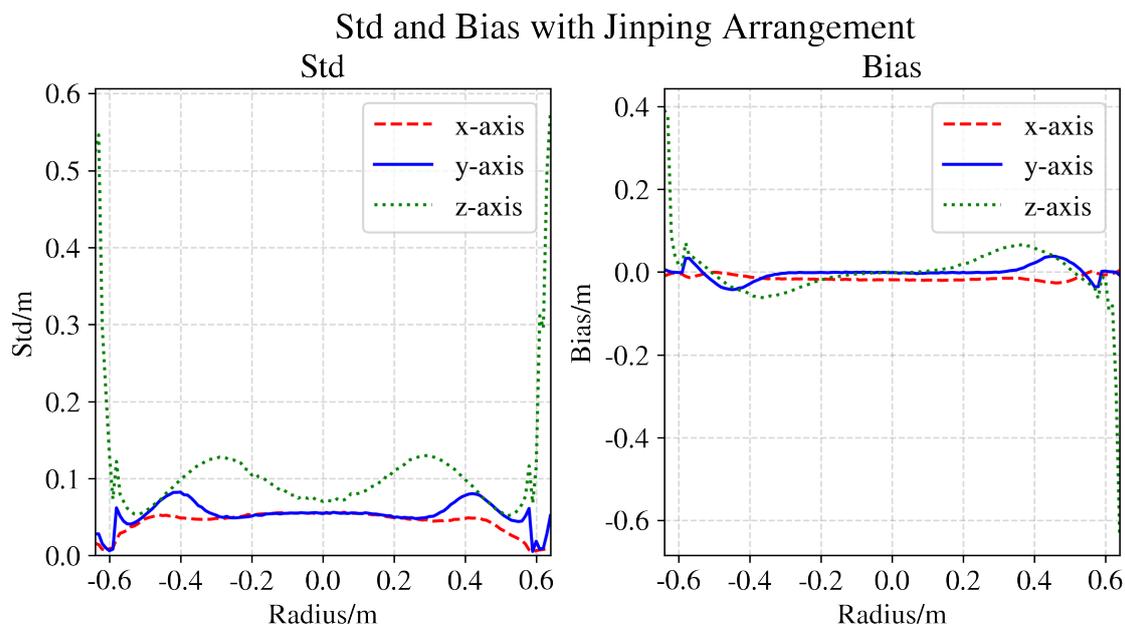


图 2.7 Jinping 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias （未截断）

在探测器中心区域，重建结果可以达到约0.06 m的分辨率和约 ± 0.02 m的偏差。而在 $r > 0.9R = 0.58$ m 的全反射区域内，PMT 上 PE 数的分布具有了新的特征，进而导致事例更容易重建至这一区域，从而 x、y 轴末端全反射区域分辨率得以提高，达到约0.02 m。但另一方面，由于 z 轴末端 PMT 排布过于稀疏，PMT 采样率差导致接收信息缺失，因此重建结果分辨率差且有较大偏差，甚至出现了探测器边界的事例重建至探测器中心的情况，这对于保证探测器中心事例的纯净性、准确性是不利的。

基于 PMT 末端排布稀疏的问题，对重建结果作了 $r \leq 0.9R \approx 0.58$ m 的截断，即只保留 $r_{\text{Truth}}, r_{\text{Recon}} \leq 0.58$ m 的事例。作出截断后的半径对比和 Std 和 Bias 如图2.8、图2.9所示。后文若不加说明，则默认结果经过截断。

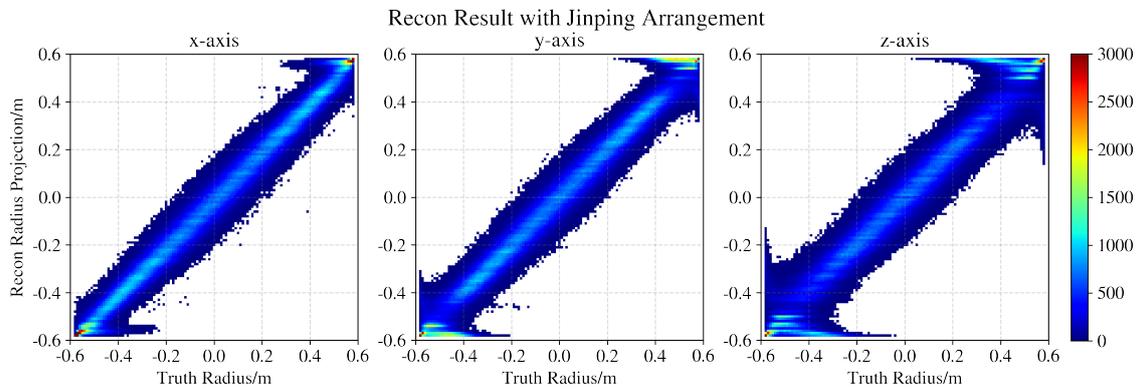


图 2.8 Jinping 排布在 x、y、z 轴上的重建结果（作截断）

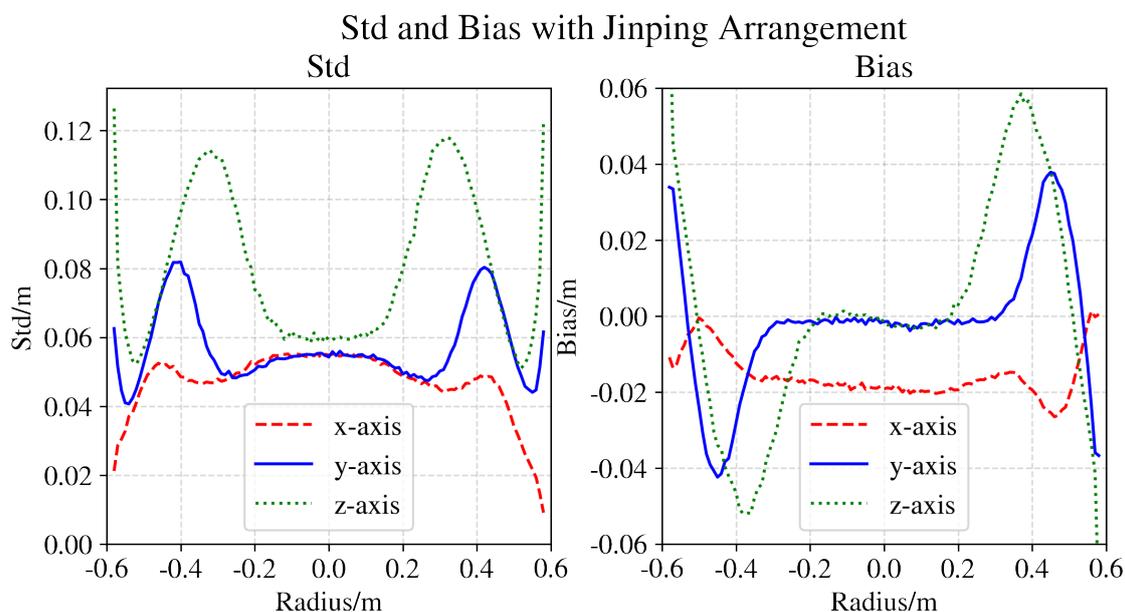


图 2.9 Jinping 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias (作截断)

观察半径对比图2.8形状和 Std 和 Bias 变化图2.9，可以初步作出以下分析：

- 不同轴的重建图像具有不同程度的差异，意味着不同方向上 PMT 的排布表现不同，说明 PMT 排布对重建结果有直接影响。
- 在 x、y 轴上，容易出现0.35 m重建至0.58 m区域的现象，这两个区域可能是由于 PMT 排布方式使得性质类似，进而导致分辨能力下降。
- 在 z 轴上甚至出现了0.58 m重建至0.35 m区域的现象，可能是由于 PMT 稀疏性使得分辨能力进一步变差。

以上内容说明，PMT 排布是重建结果的重要影响因素。

- 自适应性：对于任意的 M 都有确定的排布，并且计算简单，可以用于大型探测器上大量 PMT 的排布；
- 球面顶部和底部没有点，可以给探测器进出水口或支撑结构留有装配空间。

此外，Fibonacci 网格对 Fibonacci 常数 ξ 高度敏感。 ξ 只能取形如 $\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 的值；在所有符合条件的值中， $k = 1$ 、亦即 $\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的表现最好。同时， ξ 取有理近似值、或者小数部分截断位数少，在 M 增大时就会逐渐表现出均匀性。图3.2给出了在 $M = 1000$ 条件下， $\xi = \sqrt{2} - 1$ ($k = 2$)，0.617，0.619 时的 Fibonacci 网格。

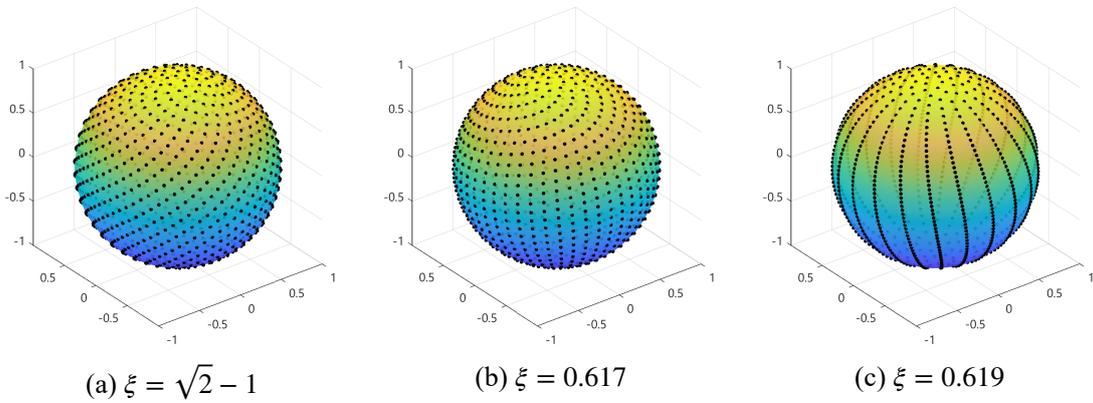


图 3.2 Fibonacci 网格示意图 ($\xi = \sqrt{2} - 1, 0.617, 0.619$)

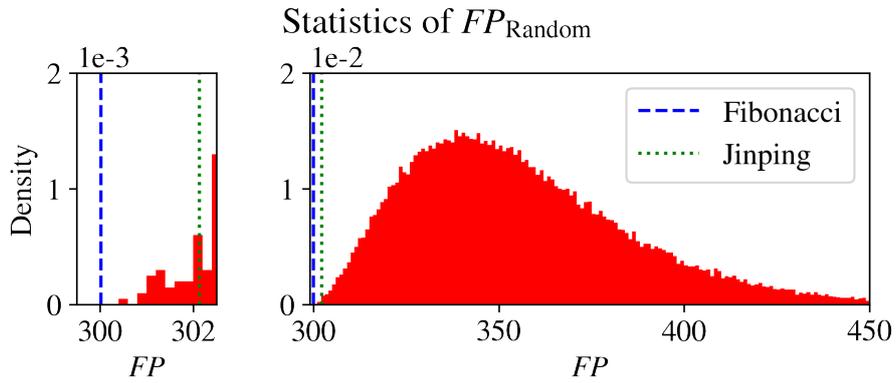
事实上，根据 Benedetto-Fickus Frame 理论^[14]，单位球面上分布的点 $\{x_i\}_{i=1}^M$ 可以看作是场下的一组基，场的响应可以由这一组基表出。记 FP 为场的势能 (frame potential):

$$FP(\{x_i\}_{i=1}^M) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle^2 \quad (3-2)$$

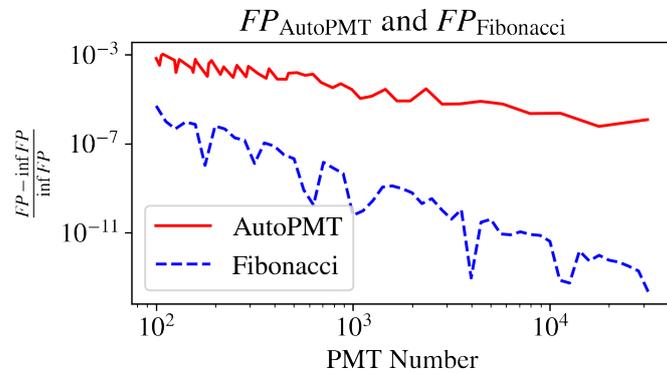
则满足 FP 尽可能小的排布是最均匀的排布，其具有下确界

$$\inf FP(\{x_i\}_{i=1}^M) = \frac{M^2}{\dim} \quad (3-3)$$

其中 \dim 表示空间维度。图3.3(a)给出了在 30 个 PMT 下，球面随机分布的 FP 统计情况，其中 $\inf FP = 30^2/3 = 300$ ， $FP_{\text{Fibonacci}} \approx 300.02$ ， $FP_{\text{Jinping}} \approx 302.14$ ，Fibonacci 排布的 FP 更接近下确界。图3.3(b)给出了对于 Fibonacci 网格，无论 PMT 数量如何， FP 都相当接近下确界。因此可以证明，Fibonacci 排布具有相当的均匀性。



(a) 球面随机排布、Jinping 排布、Fibonacci 排布的 FP 对比



(b) 不同 PMT 数量下 Fibonacci 排布的 FP

图 3.3 Fibonacci 排布的均匀性在 Benedetto-Fickus Frame 理论中的验证

3.2 斐波那契网格重建

依据 Fibonacci 网络的 PMT 排布在坐标系中如图3.4所示（后文简称为 Fibonacci 排布）。

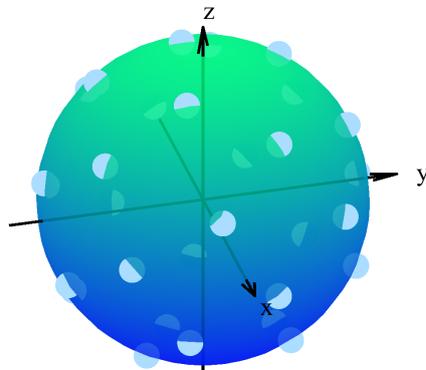


图 3.4 Fibonacci 排布示意图

对 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 x 、 y 、 z 轴上模拟并重建，模拟条件同前文。结果如图3.5、3.6所示。

Recon Result on x,y,z-axis with Different Arrangement Methods

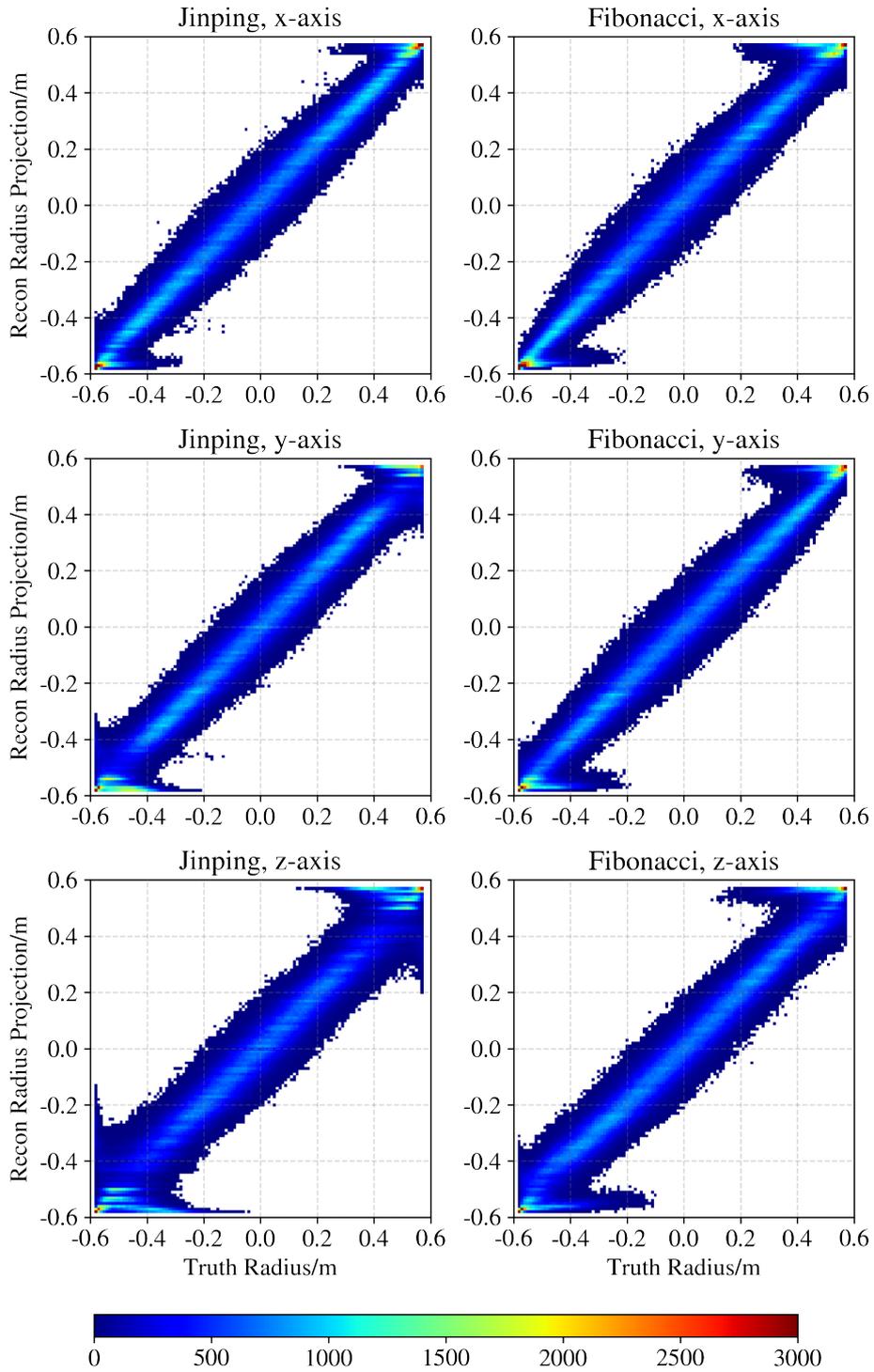


图 3.5 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 x、y、z 轴上的重建结果对比

Std and Bias on x,y,z-axis with Different Arrangement Methods

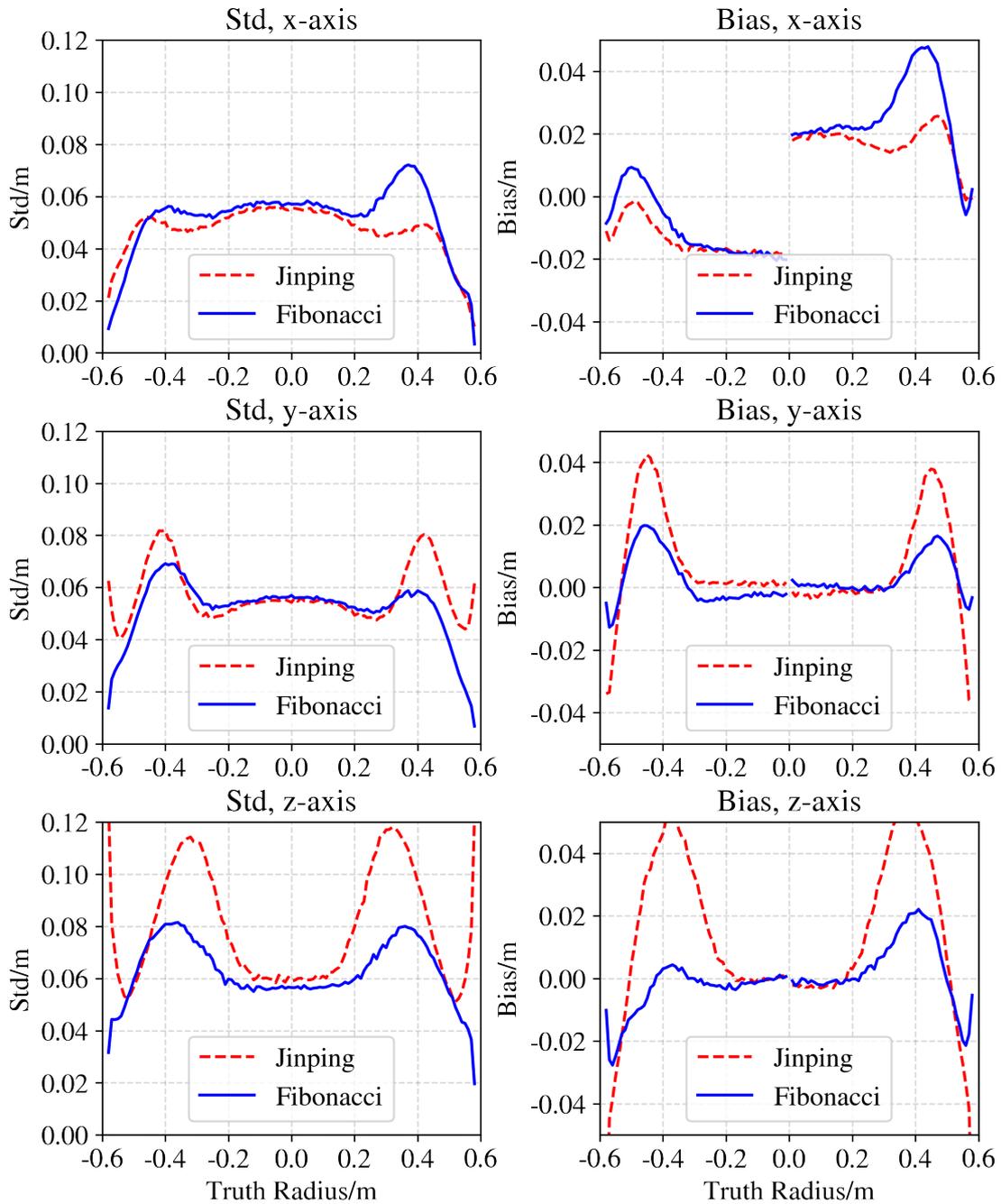


图 3.6 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias 对比

从图中可以看出：

- 由于 Fibonacci 排布的均匀性，x、y、z 轴的差异性不再像 Jinping 排布一样突出，使得 Fibonacci 排布在三条轴上的重建结果更加相似。
- Fibonacci 排布在 x、y 轴上的重建结果与 Jinping 排布基本相当，但由于 Jinping

排布中 z 轴的对称性、以及 z 轴末端的稀疏性在 Fibonacci 排布中得到了明显改善，Fibonacci 排布在 z 轴上的重建结果与 Jinping 排布相比有了相当大的提高。

3.3 PMT 排布衡量指标

x 、 y 、 z 轴是 Jinping 排布中较为特殊的轴，其中 z 轴是 Jinping 排布重建结果最差的轴，但这些轴不是 Fibonacci 排布的特殊轴或最差的轴。因此，还需要选取 Fibonacci 排布的重建结果最差轴加以重建。

可以通过建立衡量 PMT 排布的指标来指导重建结果，如果在某个衡量指标下某条轴对应的 PMT 排布较差，则可以选择这条轴作为该衡量指标下重建结果最差的轴，并比较两种排布在该轴上的重建结果，进而可以得知 Jinping 和 Fibonacci 排布的重建结果下限。

需要说明的是，这里本应选取在同一评价指标下两种排布各自最差的轴进行重建，不过从后文不难发现，在各种评价指标下 Jinping 排布的最差的轴始终是 z 轴，所以实际上是在将 Fibonacci 排布的最差轴同 Jinping 排布的普通轴的重建结果作对比。

衡量 PMT 排布，可以考察在球坐标系下随着重建轴 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 变化，球面上 M 个 PMT 对应的 $\cos \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) 的分布规律，其中 $\vartheta \in [0, \pi]$ 表示天顶角 (zenith)， $\phi \in [0, 2\pi)$ 表示方位角 (azimuth)， $\theta_i = \langle \vec{n}, \vec{x}_i \rangle$ 为重建轴法向与球心指向 PMT 向量的夹角，如图3.7所示。

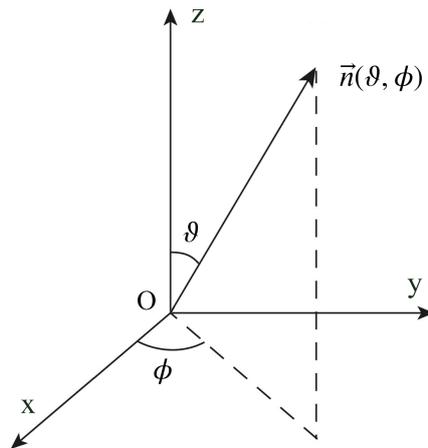


图 3.7 球坐标系下轴向 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 示意图

3.3.1 PMT 最小标准差

定义 $\cos \theta$ 的标准差

$$\text{Std}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i^n (\cos \theta_i - \overline{\cos \theta_i})^2} \quad (3-4)$$

$\text{Std}(\cos \theta)$ 描述 $\cos \theta$ 分布的离散程度，反映了不同轴向下 PMT 的均匀程度， $\text{Std}(\cos \theta)$ 越小， $\cos \theta$ 分布越集中，PMT 排布越不均匀。

作出两种排布下 $\text{Std}(\cos \theta)$ 随 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 变化如图3.8。其中由于球面对称性， \vec{n} 的取值范围为 $\vartheta \in [0, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ 。由于 ϑ 的取值范围，图中不直接给出所有 PMT 的位置信息，而是以黄色圆圈表示上半球面 PMT 所在位置，紫色圆圈表示下半球面 PMT 关于球心对称的位置。白色星号表示最终选取轴所在位置，后文图形意义同理。

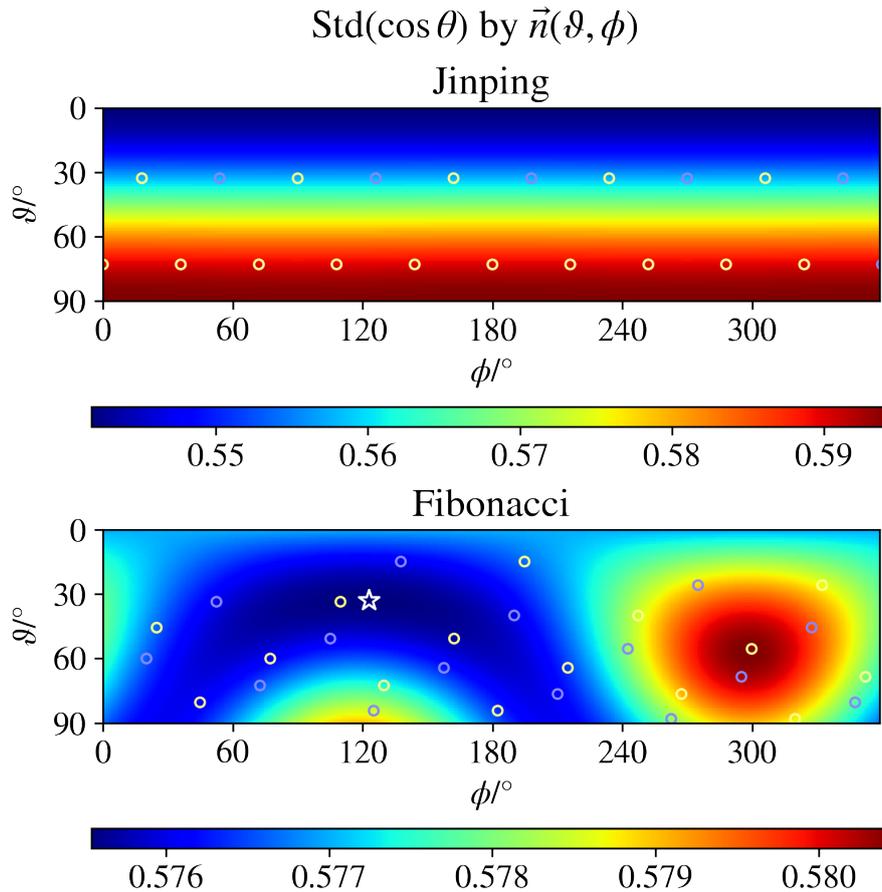


图 3.8 Std($\cos \theta$) 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像

图中可以看出，Jinping 排布具有相当程度的球面旋转对称性，同时重建轴越

靠近 z 轴，PMT 排布即越差。同样的结论也出现在下文的排布衡量指标中。

在这一指标下，选取 $\arg \min_{(\theta, \phi)} \text{Std}(\cos \theta) = (33^\circ, 119^\circ)$ 作为重建轴，记作 $\vec{n}_{\min \text{Std}}$ 。重建轴方位如图3.9所示，重建结果如图3.10、3.11所示。

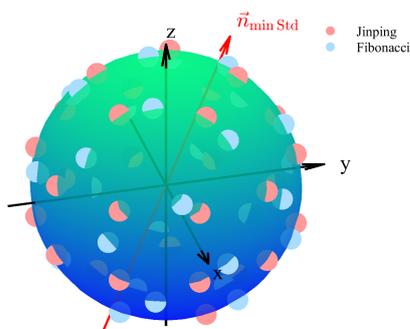


图 3.9 重建轴 $\vec{n}_{\min \text{Std}}$ 方位示意图

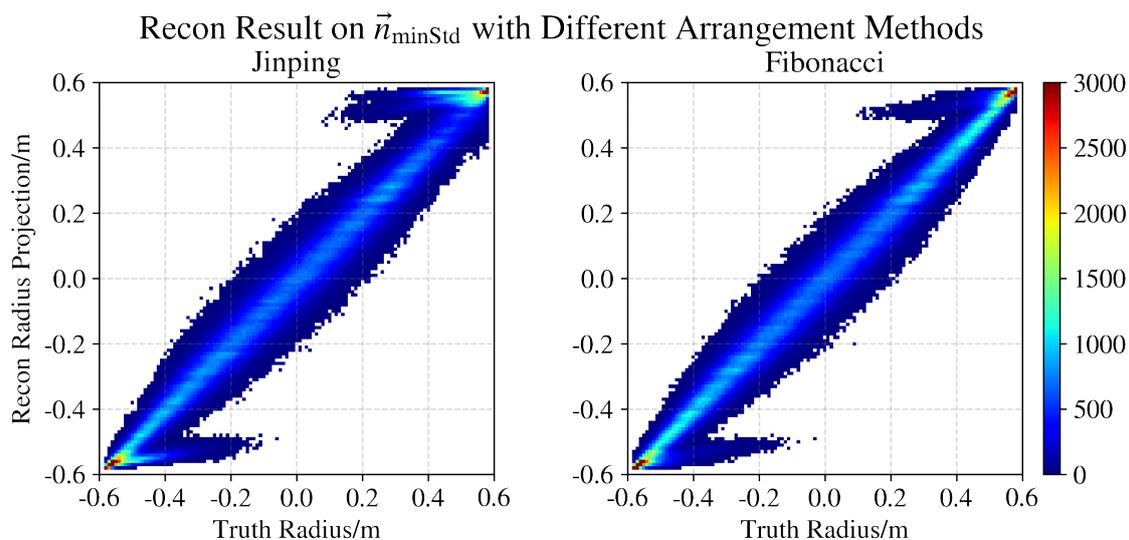


图 3.10 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{Std}}$ 上的重建结果对比

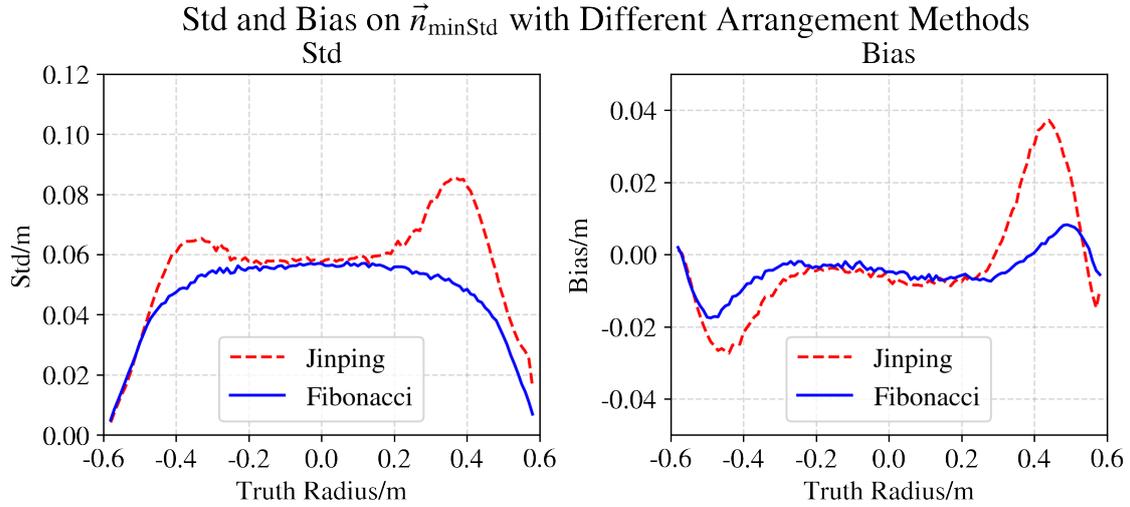


图 3.11 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min\text{Std}}$ 上的 Std 和 Bias 对比

后文将对重建结果作统一讨论，在此暂时略过。

3.3.2 PMT 最小聚类数

为考察 PMT 的对称性，拟对 $\cos\theta$ 进行聚类。此处采取的算法为最大最小距离 (Max-Min-Distance) 算法，相比 k-means 等聚类算法，最大最小距离算法不对聚类数作限制，同时可以避免类的距离过近，分类速度也较快。最大最小距离算法流程如下：

1. 给定 M 个样本 x_m ($m = 1, 2, \dots, M$) 和一衡量阈值的参数 α 。
2. 从样本中任取一 x_m 作为第一个聚类中心 c_1 。
3. 取到 c_1 距离最大的样本作为第二个聚类中心 c_2 ，即 $c_2 = \arg \max_{x_m} \|x_m - c_1\|$ 。
4. 计算每个样本到当前所有聚类中心距离的最小值 $d_m = \min_{c_n} \|x_m - c_n\|$ 。
5. 若上述距离的最大值大于阈值距离，即 $\max_{x_m} d_m \geq \alpha \|c_1 - c_2\|$ ，则取满足距离最大的样本作为新的聚类中心 c_3 ，即 $c_3 = \arg \max_{x_m} d_m$ 。
6. 循环上述过程，直到最终满足阈值距离条件 $\max_{x_m} d_m < \alpha \|c_1 - c_2\|$ 为止。
7. 把样本归类于最近的聚类中心，考察聚类结果，若不合适则重取 α 和 c_1 ，重复上述过程。

阈值参数 α 不宜过大或过小，过大会导致聚类条件模糊，过小则会导致过度分类，实验中取 $\alpha = 0.01$ 。聚类数反映了不同轴向下 PMT 的对称性，聚类数越小，PMT 排布越对称。作出两种排布下 $\cos\theta$ 聚类数随 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 变化如图3.12。

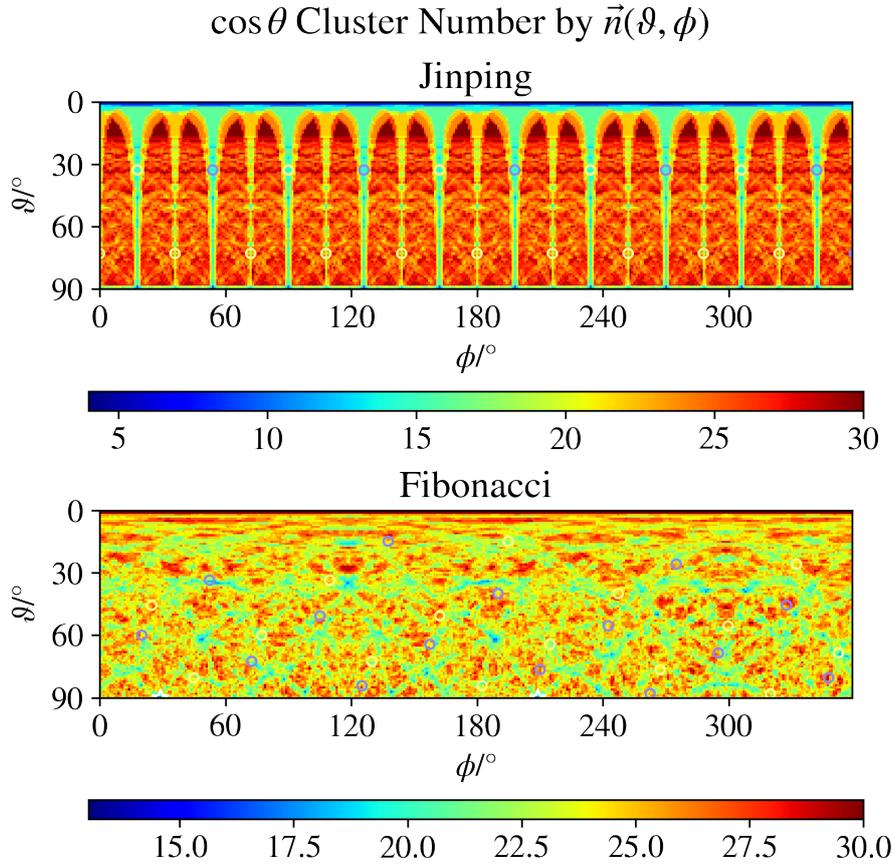


图 3.12 $\cos \theta$ 聚类数关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像

图3.13为所有 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 下 $\cos \theta$ 聚类数的统计结果。可以看出，Fibonacci 排布比 Jinping 排布具有更大的聚类数期望 Avg 和更小的聚类数标准差 Std，而且不存在 PMT 高度对称的情况，说明 Fibonacci 排布中 PMT 的非对称性更好。

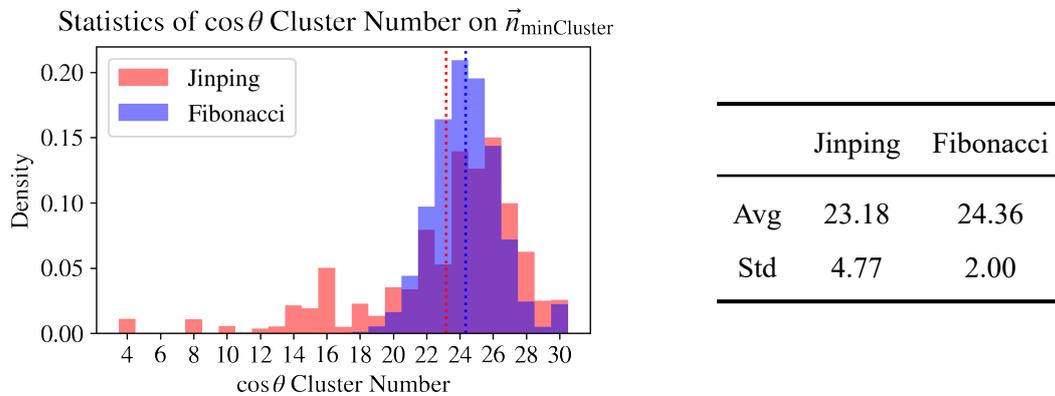


图 3.13 $\cos \theta$ 聚类数统计

在这一指标下，选取 $\arg \min_{(\vartheta, \phi)} \text{Num}(\cos \theta) = (90^\circ, 29^\circ)$ 作为重建轴，记作

$\vec{n}_{\min \text{Cluster}}$ 。重建轴方位如图3.14所示，该轴上 $\cos \theta$ 的分布如图3.15所示。重建结果如图3.16、3.17所示。

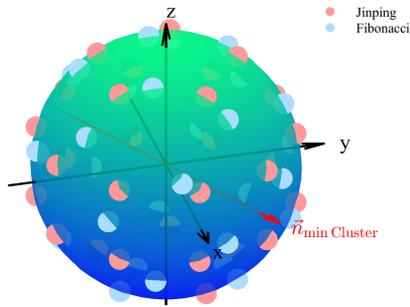


图 3.14 重建轴 $\vec{n}_{\min \text{Cluster}}$ 方位示意图

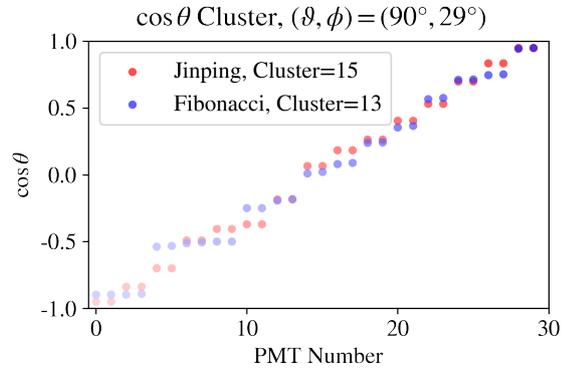


图 3.15 重建轴 $\vec{n}_{\min \text{Cluster}}$ 上 $\cos \theta$ 分布

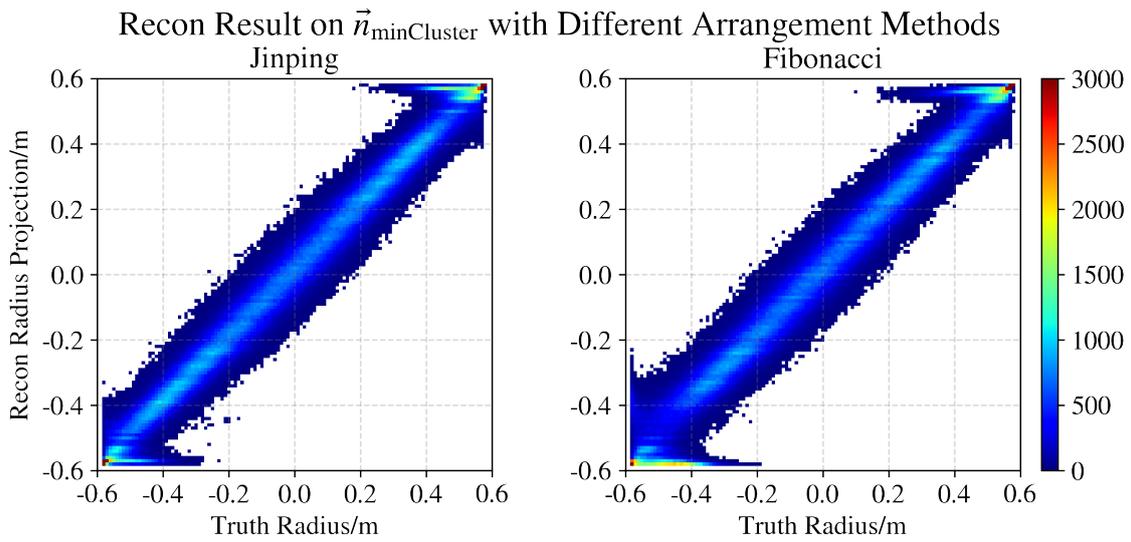


图 3.16 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{Cluster}}$ 上的重建结果对比

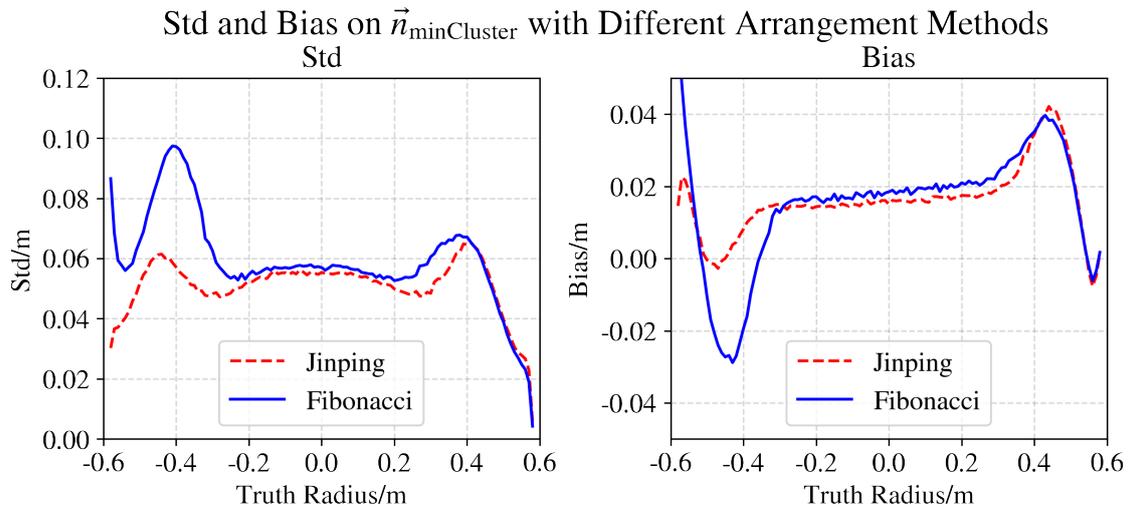


图 3.17 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min\text{Cluster}}$ 上的 Std 和 Bias 对比

3.3.3 PMT 到轴最大距离

PMT 到轴的距离可以通过 $|\cos \theta_i|$ 描述。在球面上， $|\cos \theta_i|$ 越小，PMT 与轴距离越大； $\max_i |\cos \theta_i|$ 越小，与轴最近的 PMT 到轴距离越大，说明在该轴上 PMT 整体排布越稀疏。

作出两种排布下 $\max_i |\cos \theta_i|$ 随 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 变化如图3.18。

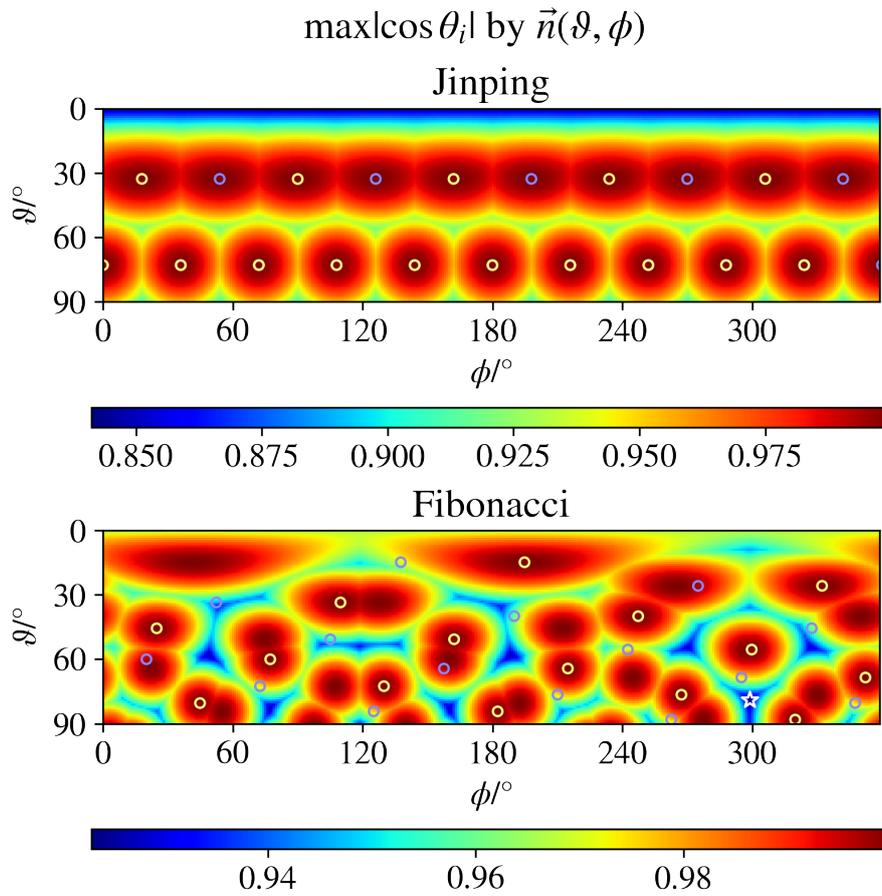


图 3.18 $\max_i |\cos \theta_i|$ 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像

在这一指标下，选取 $\arg \min_{(\vartheta, \phi)} \text{Std}(\cos \theta) = (79^\circ, 299^\circ)$ 作为重建轴，记作 $\vec{n}_{\min \max |\cos|}$ 。重建轴方位如图3.19所示，重建结果如图3.20、3.21所示。

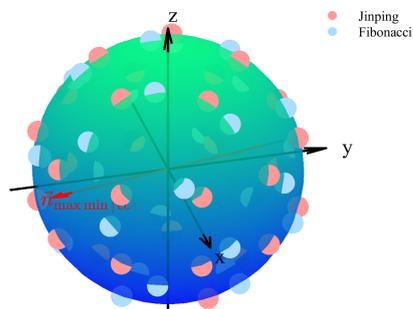


图 3.19 重建轴 $\vec{n}_{\min \max |\cos|}$ 方位示意图

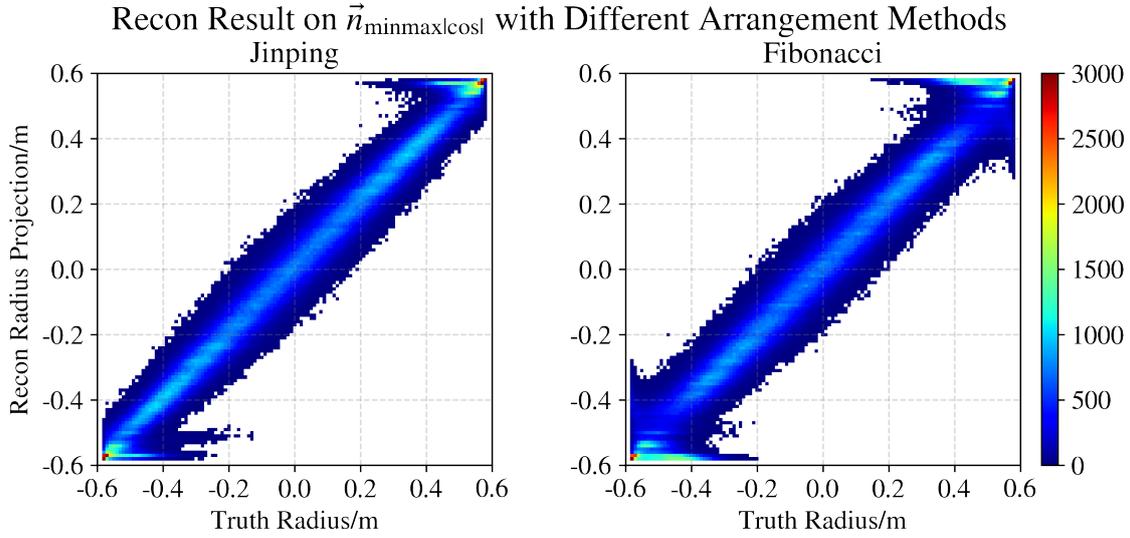


图 3.20 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \max |\cos|}$ 上的重建结果对比

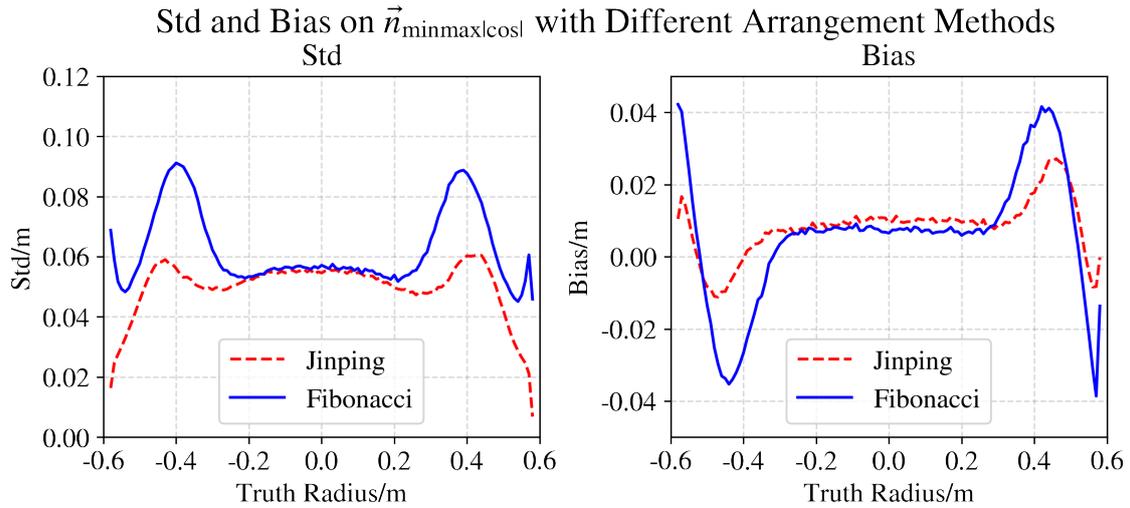


图 3.21 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \max |\cos|}$ 上的 Std 和 Bias 对比

3.3.4 全反射区域 PMT 最小数量

全反射区域的重建对于全空间重建结果的准确性有至关重要的作用，因此研究能有效接收到全反射区域信息的 PMT 数目是必要的。受全反射区域影响的 PMT 无法直接得知，但可以通过考察 PE 数的期望 E_{PE} 随 (r, θ) 的变化情况定性分析之。

图3.22展示了不同半径下 E_{PE} 随 $\cos \theta$ 的变化情况。在 $r \leq 0.58 \text{ m}$ 即内部区域，曲线随半径变化平稳；进入全反射区域起，由于全反射效应的存在，曲线开始在 $\cos \theta = 0.6$ 附近凹现一谷，并且越靠近探测器边界，谷的宽度越宽、谷值越小，因

此可以认为落入谷内的 PMT 是可以接收到全反射区域信息的 PMT。

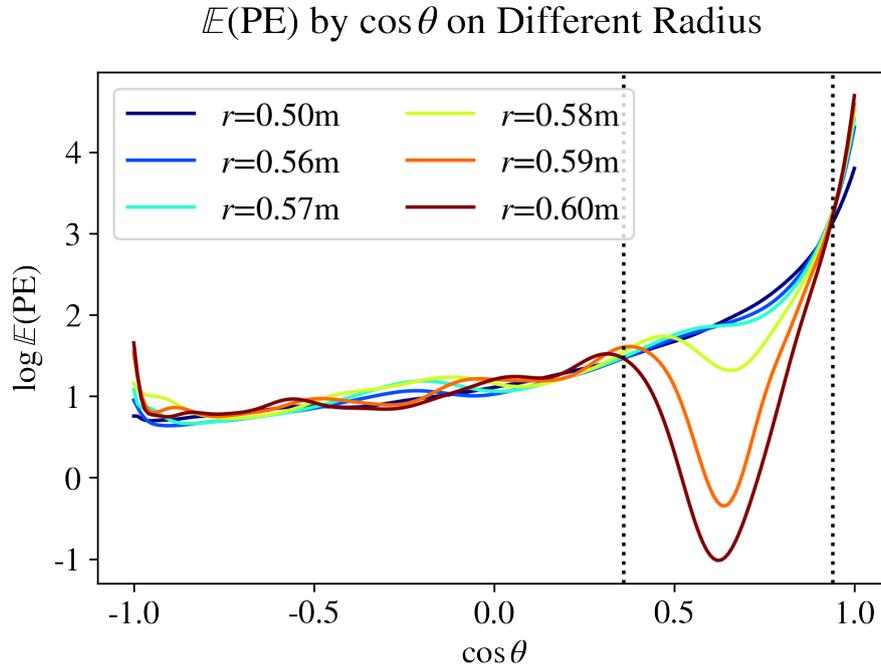


图 3.22 不同半径下 \mathbb{E}_{PE} 随 $\cos \theta$ 的变化

这一谷所在区间并不能具体量化，但可以近似认为，相对于内部区域， \mathbb{E}_{PE} 曲线在全反射区域发生的变形所在区间即为全反射区间，可以估计这一区间为 $[0.36, 0.94]$ 。作出两种排布下全反射区域区间内的 $\cos \theta$ 数目随 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 变化如图 3.23。

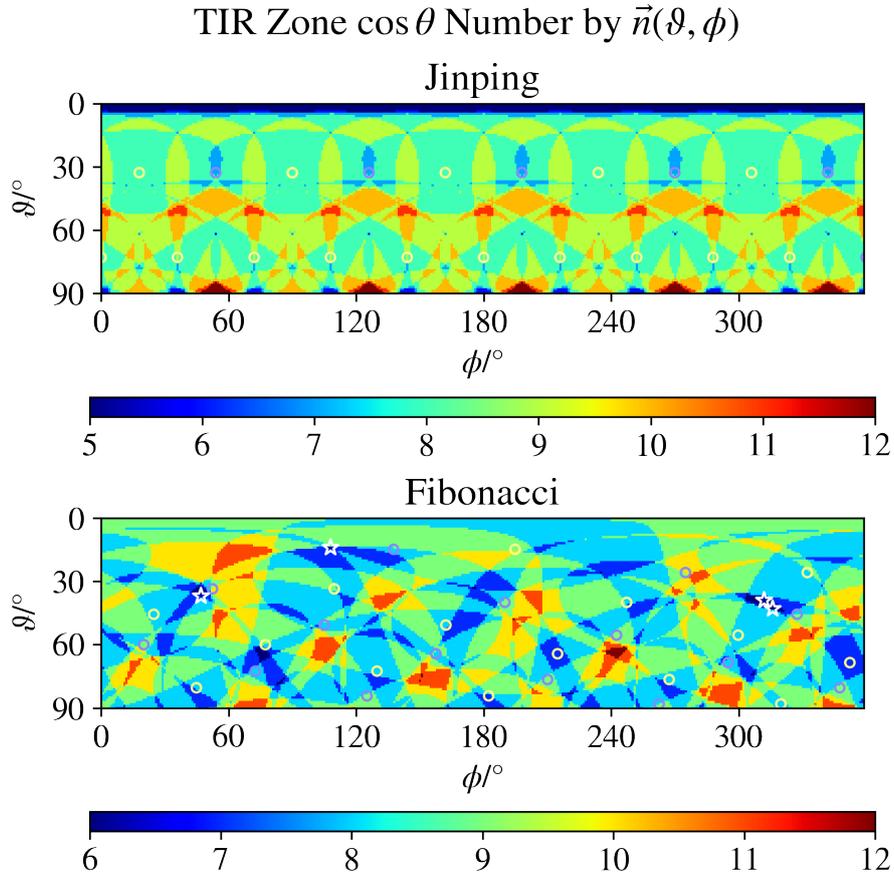


图 3.23 全反射区间内 $\cos \theta$ 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像

下图3.24为所有 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 下全反射区间内 $\cos \theta$ 个数的统计结果。可以看出，Fibonacci 排布比 Jinping 排布具有更大的 $\cos \theta$ 个数期望 Avg 和更小的 $\cos \theta$ 个数标准差 Std，而且不存在全反射区间 PMT 过少的情况，说明 Fibonacci 排布对全反射区间信息的接收更全面。

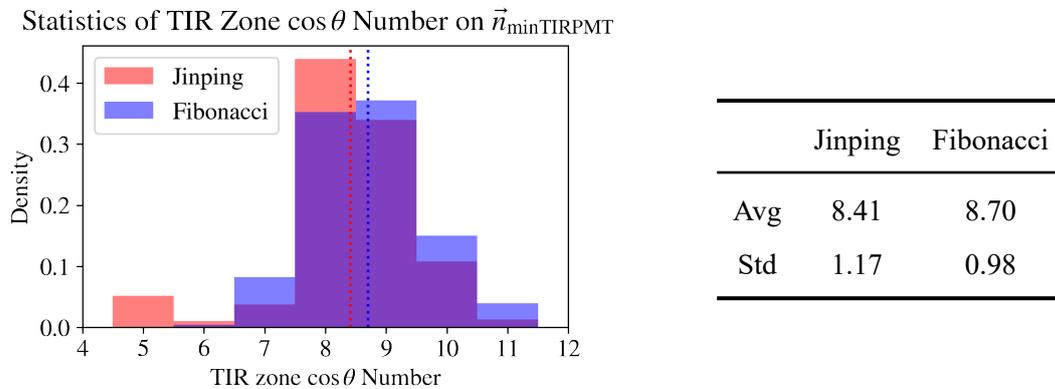


图 3.24 全反射区间内 $\cos \theta$ 数目统计

在这一指标下，选取 $\arg \min_{(\vartheta, \phi)} \text{Num}(\cos \theta) = (14^\circ, 108^\circ)$ 作为重建轴，记作 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 。重建轴方位如图3.25所示，该轴上 $\cos \theta$ 的分布如图3.26所示。重建结果如图3.27、3.28所示。

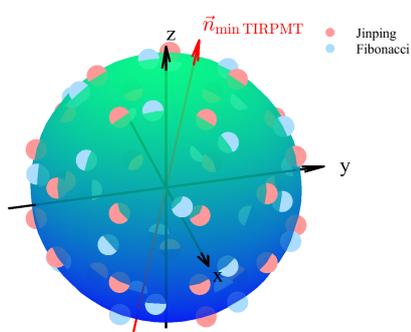


图 3.25 重建轴 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 方位示意图

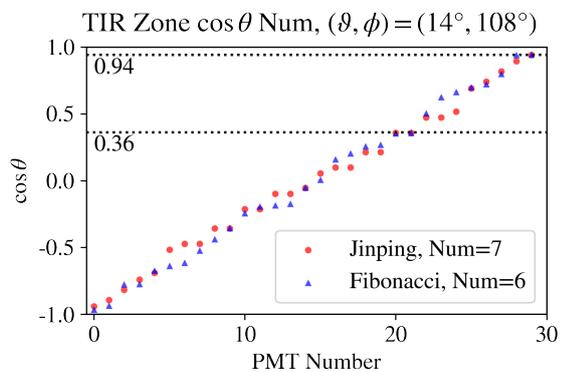


图 3.26 重建轴 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 上 $\cos \theta$ 分布

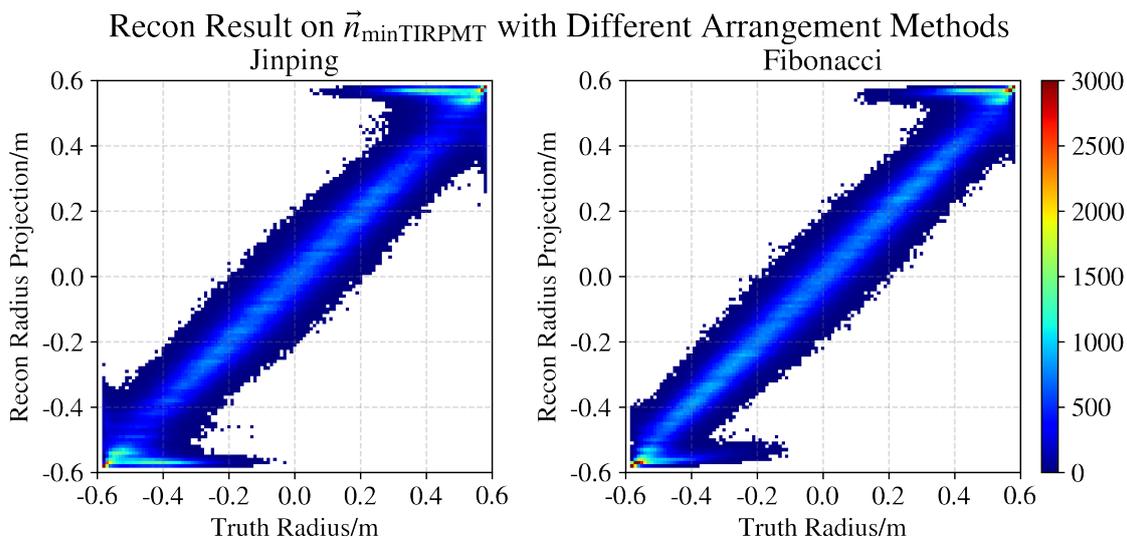


图 3.27 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 上的重建结果对比

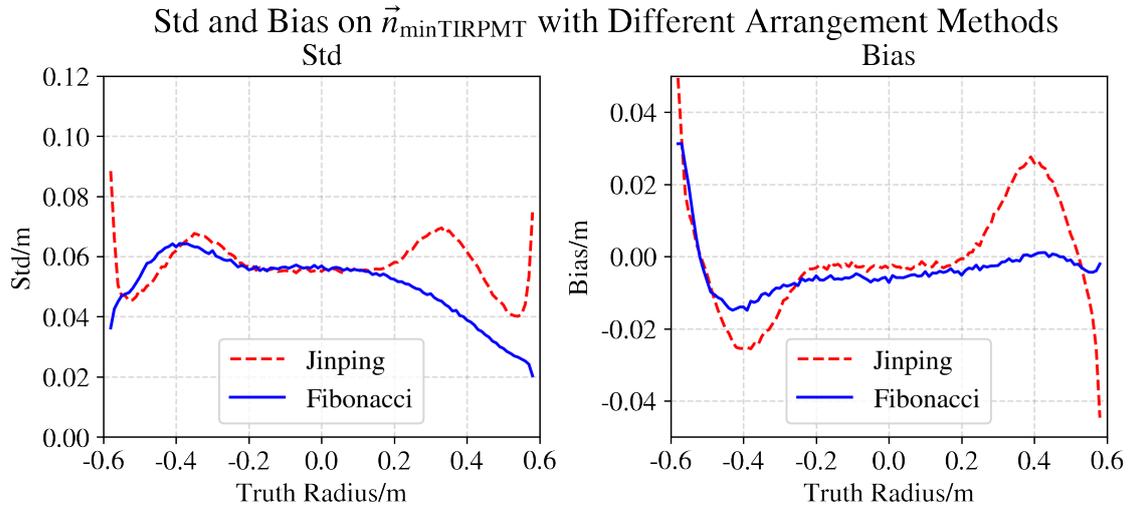


图 3.28 Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min\text{TIRPMT}}$ 上的 Std 和 Bias 对比

3.4 重建结果分析

从 Std 和 Bias 变化图上看，随半径增加二者整体呈下降趋势，这是逐渐接近全反射临界所致。但在某些区域仍有值得注意的特殊变化，以下为各区域上重建结果的解释。

0 m~0.2 m:

在这一区间内，两种排布和各条重建轴的 Std 和 Bias 没有显著差异，体现出在探测器中心区域，只要 PMT 整体上数量足够、排布较为均匀，就足够使各 PMT 的接收信息以及重建结果相似。

0.35 m~0.58 m:

在这一区域上出现了重建结果的相似性：真值半径 0.35 m 可能重建至 0.58 m，但真值半径 0.58 m 不一定重建至 0.35 m；同时，真值半径 0.35 m 的重建结果并不在 0.35 m~0.58 m 之间连续。

这一区域的相似性由全反射临界和轴末端附近的 PMT 两方面共同作用。直观的解释是，随着顶点位置逐渐靠近全反射临界，对于顶点近侧轴末端附近的 PMT，一方面这些 PMT 上的 E_{PE} 会由于全反射现象而下降，另一方面又会由于与事例距离减小、根据平方反比定律而增大，由此造成 0.35 m 与 0.58 m E_{PE} 分布相似，且不与二者之间位置的分布相似。由此造成了 0.35 m 的事例如果不可分辨，则可能重建至、且仅可能重建至 0.58 m。0.58 m 的事例由于全反射现象，本不应重建至 0.35 m，但如果轴末端附近 PMT 排布稀疏，则 PMT 信息缺失，因此 0.58 m 的事例错误地重

建至0.35 m。

与之相对的是，如果顶点近侧轴末端附近的 PMT 与轴距离很小，则这一 PMT 上的 E_{PE} 会显著高于其他 PMT，因此将主导重建结果，从而使得此时0.58 m的事例分变形良好。

为了验证以上结论，在 Jinping 排布的 x、y、z 轴以及一条正朝向 $\bar{x}_i = (0.796, 0, 0.245)$ 的 PMT 的轴上，令 $[n_i] = [N_i]$ ，通过式2-5计算得到真值对应的似然函数，如图3.29所示。

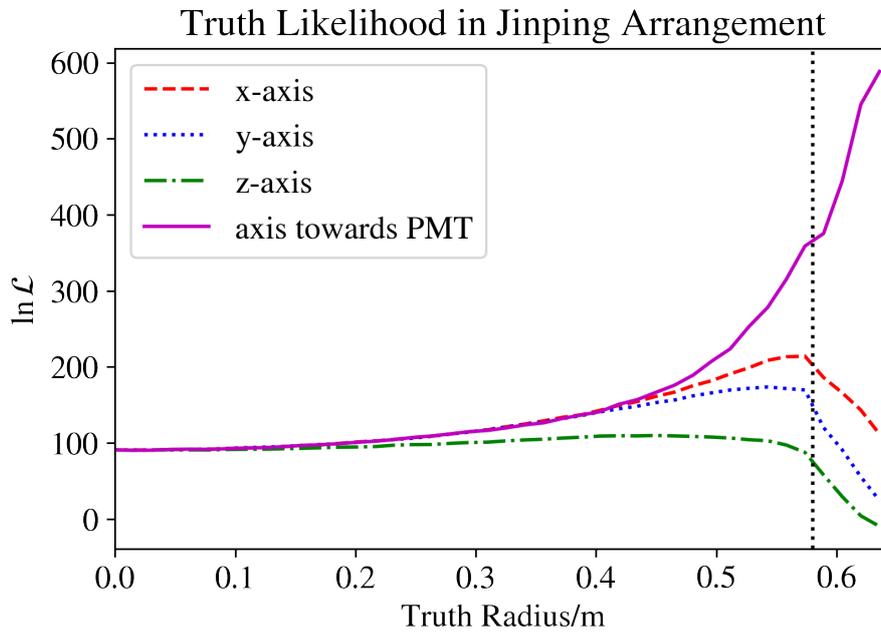


图 3.29 Jinping 排布的不同轴上真值的似然函数

从 Jinping 排布图2.5中可以看出，x 轴末端附近有距离较近的 2 个 PMT，y 轴末端有距离次近的 4 个 PMT，而 z 轴末端 5 个 PMT 距离较远，重建轴末端 PMT 疏密程度降序排列为：正朝向 PMT 的轴、x 轴、y 轴、z 轴。四条轴的真值 likelihood 在 0 m~0.2 m 范围内区别不大。对于正朝向 PMT 的轴，真值 likelihood 单调变化，真值可以通过不同的 likelihood 区分；对于 x、y 轴，末端 PMT 对重建结果的主导程度远不如前，likelihood 在约 > 0.4 m 的区域上区分程度变差；对于 z 轴，由于末端 PMT 过于稀疏，导致不可分辨性严重，全反射区域内部的事例都有可能被混淆。

3.5 重建结果小结

通过在某个衡量 PMT 排布的指标下选取 Fibonacci 排布最差的轴，并且获得了较差的重建结果，证明了衡量指标的选取意义。同时，Fibonacci 排布的最差重建结果仍在可接受范围之内，并且好于 Jinping 排布的最差重建结果（z 轴），证明了 Fibonacci 排布整体上优于原排布。

稀疏性包括了由 PMT 排布方式导致的特定方向稀疏，以及由 PMT 数量导致的靠近探测器边界稀疏。因此在锦屏一吨原型机中 $> 0.35\text{ m}$ 的区域，PMT 的排布对于重建结果具有重要影响。如何量化 PMT 的稀疏性，进而给出在 PMT 排布密度上升至何种程度时可以消除这一稀疏性，仍有待进一步探究。

第 4 章 百吨探测器 PMT 排布

根据锦屏一吨原型机的实验结论，PMT 的排布方式和数量是影响重建结果分辨率的关键因素，因此需要研究：某种排布下至少需要多少数量的 PMT 才能消除简并解的情况；或者在给定 PMT 数量的前提下如何排布有最好分辨率，进而给出百吨探测器 PMT 的排布理念。

此外，低能事件使得大探测器中接收有效信息的 PMT 的排布仍是稀疏的，因此用研究一吨原型机重建与排布的思想来指导百吨探测器的排布优化是有意义的。

4.1 一吨原型机改良

PMT 数量在探测器响应效率中反映为 PMT 覆盖率。单个 PMT 可覆盖探测空间的近似计算公式为^[15]

$$\omega_{ij} = 2\pi \left(1 - \frac{d_{ij}}{\sqrt{d_{ij}^2 + R_0^2 \cos \alpha}} \right) \quad (4-1)$$

其中， ω_{ij} 表示第 i 个 PMT 对第 j 个事例产生响应的立体角， d_{ij} 表示 PMT 与事例顶点的直线距离， α 表示从事例顶点指向 PMT 的向量与 PMT 外法向量间的夹角。因此 PMT 覆盖率最大的事例发生在探测器中心，此时 PMT 覆盖率

$$\Omega = \frac{M \times 2\pi \left(1 - \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + R_0^2}} \right)}{4\pi} \approx 11.4\%$$

在 $R_s \gg R_0$ 的大型探测器里，这一结果可以进一步近似为

$$\Omega = \frac{M \times \pi R_0^2}{4\pi R_s^2} \approx 11.5\%$$

从一吨原型机现有的重建结果来看，即使 PMT 排布得再均匀，也无法避免 PMT 覆盖率低而导致稀疏性的情况。为此，尝试将一吨原型机的 PMT 数量增加到 60 个，对比传统排布和 Fibonacci 排布下的重建结果。

这里使用的传统排布方法类似于 Jinping 排布，是 JSAP 内置的、拟用于百吨球形探测器 PMT 排布的 AutoPMT 方法（后文简称 AutoPMT 排布）。在 AutoPMT 排布中，PMT 的位置由 PMT 排布半径 R_s 、PMT 半径 R_0 、以及一衡量疏密程度的因子 $f (> 1)$ 给定。PMT 以环状均匀排列在 z 轴方向不同高度的球层上，定义 PMT

中心距离 $d = 2fR_0$ ，则圆环个数

$$L = \left\lfloor \frac{\pi R_s}{d} \right\rfloor - 1 \quad (4-2)$$

第 l 个环 ($l = 1, 2, \dots, L$) 的高度和半径

$$z_l = R_s \cos \frac{l\pi}{L}, \quad r_l = R_s \sin \frac{l\pi}{L} \quad (4-3)$$

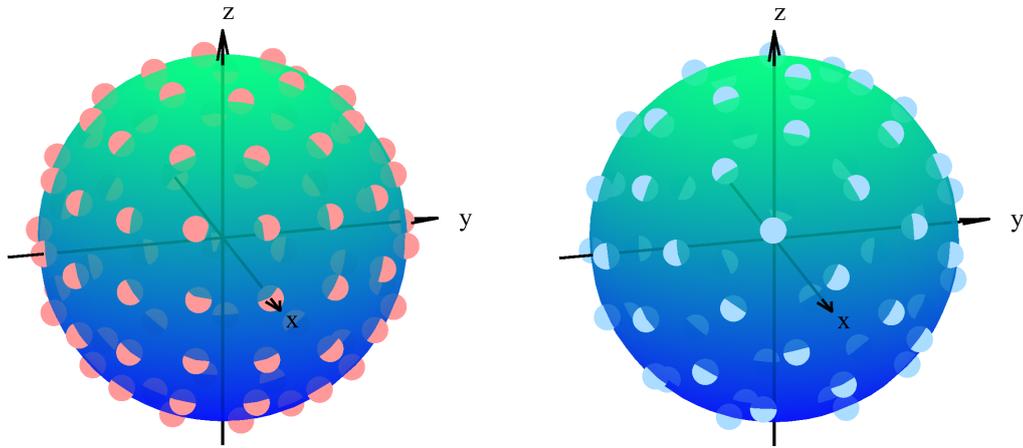
第 l 个环上排布 PMT 的个数

$$L_i = \left\lfloor \frac{2\pi r_i}{d} \right\rfloor \quad (4-4)$$

对应第 l 个环上第 k 个 PMT ($k = 1, 2, \dots, L_i$) 的纵横坐标

$$x_k = r_l \cos \frac{2k\pi}{L_i}, \quad y_k = r_l \sin \frac{2k\pi}{L_i} \quad (4-5)$$

令疏密因子 $f = 1.8$ ，即可得到 60 个 PMT 下一吨原型机的 AutoPMT 排布，其从上至下分为 6 层，每层各有 6/11/13/13/11/6 个 PMT 环状均匀排布。60 个 PMT 下的 AutoPMT 排布和 Fibonacci 排布如图4.1所示。



(a) AutoPMT 排布，60 个 PMT

(b) Fibonacci 排布，60 个 PMT

图 4.1 60 个 PMT 下 AutoPMT 排布和 Fibonacci 排布示意图

对 30 个 PMT 下的 Jinping 排布和 Fibonacci 排布、60 个 PMT 下的 AutoPMT 排布和 Fibonacci 排布进行模拟并重建，模拟条件为从探测器中心起，在每隔 0.01 m 的半径的球面上随机生成 10000 个事例，其余条件同前。由于 PMT 数量增加有望改善稀疏性，所以不对重建结果作截断。重建的半径对比图如图4.2所示，Std 和 Bias 对比图如图4.3所示，其中应用2-7式时，由于没有了特定的重建轴，所以真值半径所在方向即为重建轴。特别地，对于 $r = 0$ m 处的情况，由于真值半径可以认为朝

向任意方向，因此重建半径将随机投影至某条轴上。

Recon Result with Different PMT Numbers and Arrangement Methods

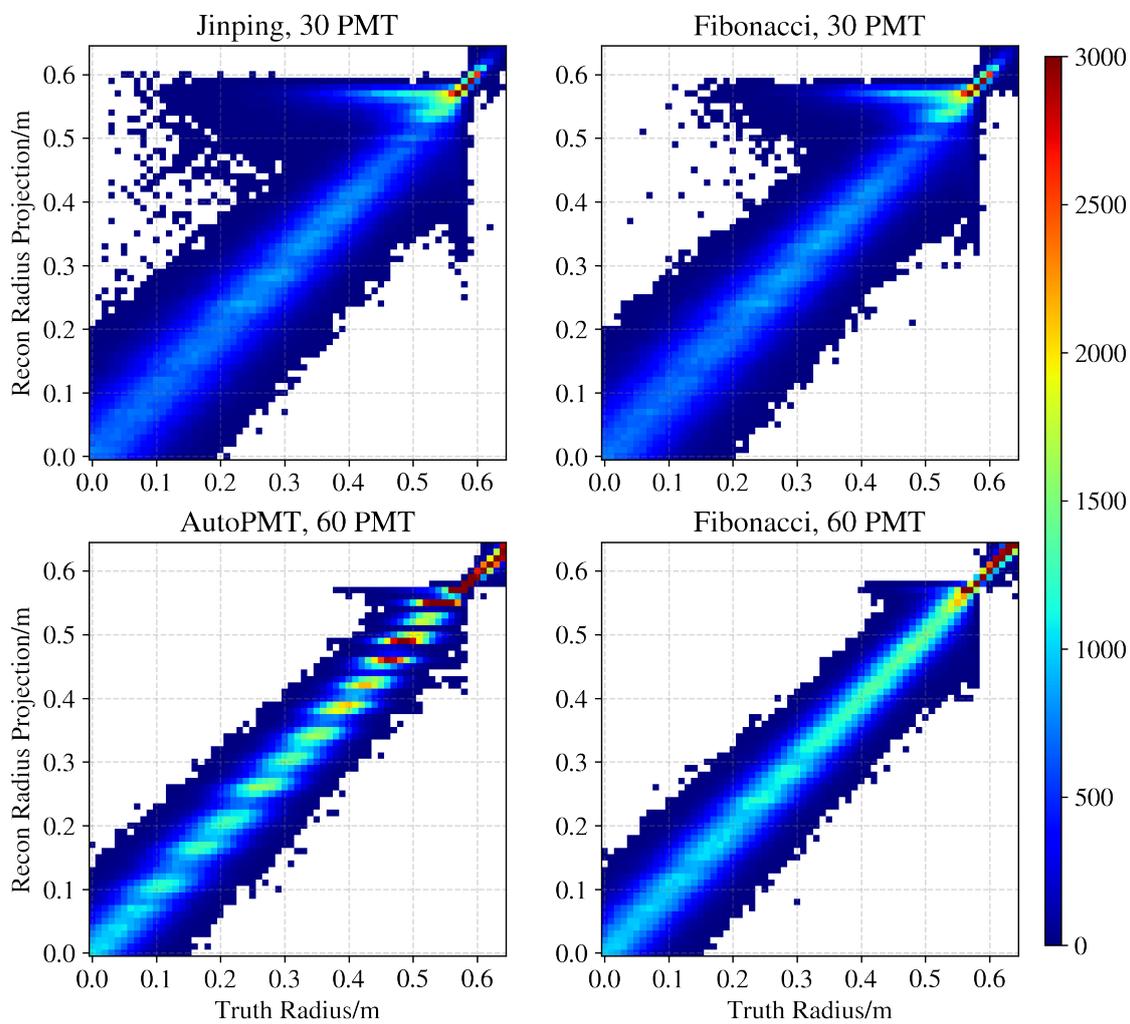


图 4.2 不同 PMT 数量下不同排布方式的重建结果对比

Std and Bias with Different PMT Numbers and Arrangement Methods

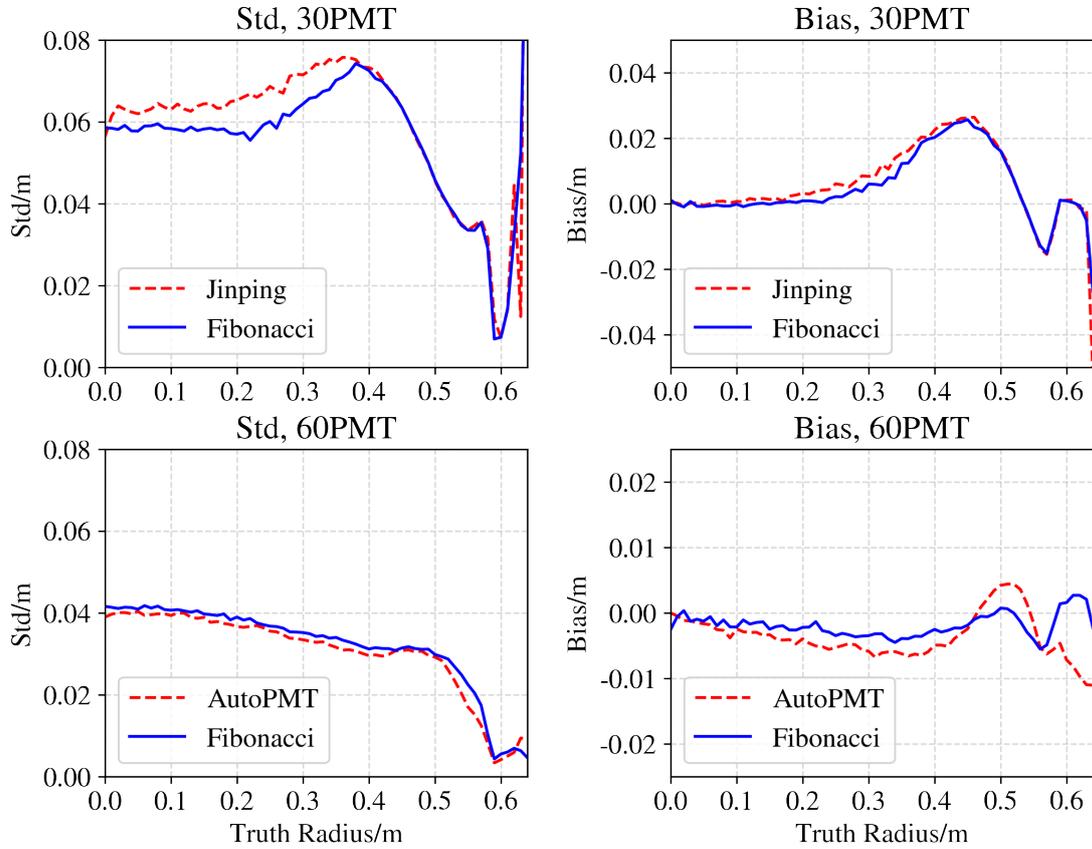


图 4.3 不同 PMT 数量下不同排布方式的 Std 和 Bias 对比

从图中可以看出，由于在固定半径的球面上的随机位置模拟事例，而半径比较图显示出重建结果在较大区域上的相似性，因此说明稀疏性几乎是普遍存在的。

在 30 个 PMT 的重建结果中，Jinping 排布比 Fibonacci 排布表现出了更为强烈的稀疏性，多见于 $0\text{ m} \sim 0.4\text{ m}$ 的事例重建至 $0.4\text{ m} \sim 0.6\text{ m}$ 、 $0.5\text{ m} \sim 0.6\text{ m}$ 的事例重建至 $0.3\text{ m} \sim 0.4\text{ m}$ 。这些区间上的 Std 也略高于 Fibonacci 排布。这说明即使在稀疏性条件下，Fibonacci 排布整体表现也优于 Jinping 排布。

对 30 个和 60 个 PMT 的重建结果进行比较：在内部区域，最差 Std 从约 0.08 m 下降到了约 0.04 m ，最差 Bias 从约 $\pm 0.02\text{ m}$ 下降到了约 $\pm 0.01\text{ m}$ ，其余各区域的分辨率也均有不同程度的提升；在全反射区域，Std 和 Bias 不再发生突变，拥有了远高于内部区域的分辨率，达到约 0.005 m 。PMT 数量的增加显著改善了原有的稀疏性。

此外，60 个 PMT 下 AutoPMT 排布的重建结果中的多个局部极值仍有待进一步研究。

在此基础上，继续对一吨原型机进行了其他数量的 PMT 下 Fibonacci 排布的

重建（暂未考虑 PMT 与探测器其他结构的冲突），结果如图4.4、图4.5所示。

Recon Result by Different PMT Numbers with Fibonacci Arrangement

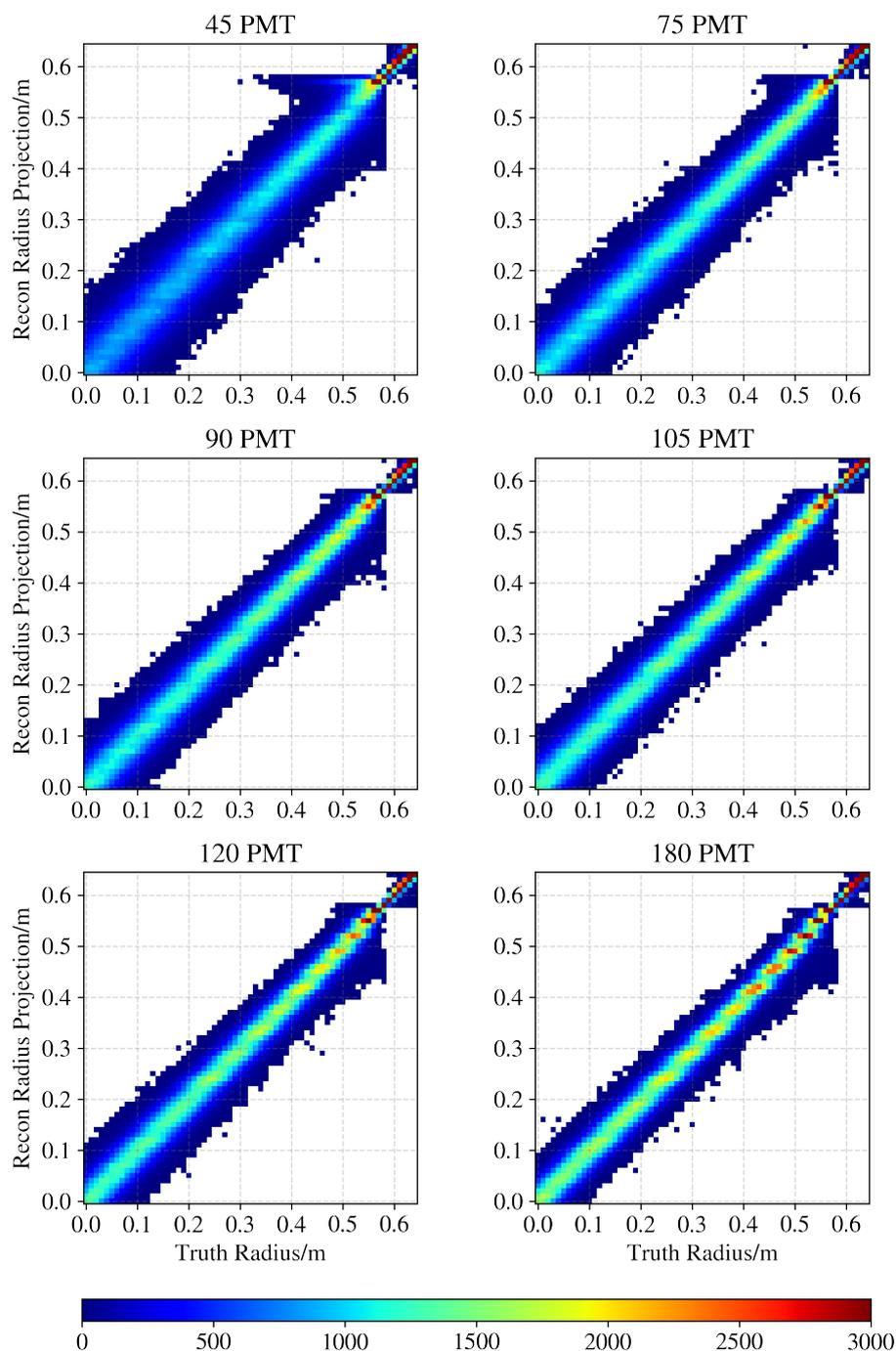


图 4.4 不同 PMT 数量下 Fibonacci 排布的重建结果对比

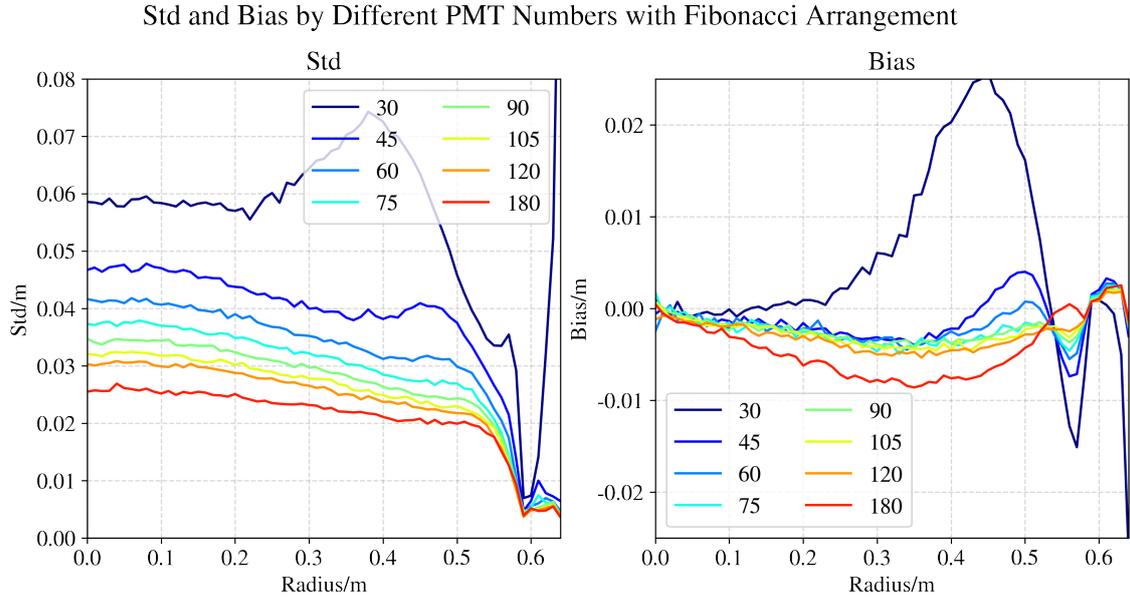


图 4.5 不同 PMT 数量下 Fibonacci 排布的 Std 和 Bias 对比

在 PMT 数量最初增加时，靠近探测器边界区域的稀疏性被迅速改善，末端 Std 和 Bias 不再突变，主要受全反射现象影响而降至较低水平；随着 PMT 数量继续增加，重建结果在 0.35 m~0.6 m 的不可分辨性得到改善，Std 和 Bias 曲线逐渐变得平滑，Std 保持下降，Bias 下降至一较低水平后基本保持稳定；当 PMT 数量继续增加时，Std 继续下降，但 Bias 不降反升，这是由于光子在 PMT 光学窗表面反射影响增大所致。

以原点处的 Std 代表探测器整体分辨率，同时定义相对分辨率

$$\sigma = \frac{\text{Std}(0\text{ m})}{R} \quad (4-6)$$

在锦屏一吨原型机的结果中，将相对分辨率对 PMT 覆盖率进行拟合。根据已经提出的探测器分辨率与 PMT 数量的关系^[16]，选取简单的平方根反比关系进行拟合，得到

$$\sigma = \frac{0.0214}{\sqrt{\Omega}} + 0.00163 \quad (4-7)$$

拟合曲线如图 4.6 所示。考虑到 PMT 覆盖率具有上限，其相对分辨率理论上限约为 0.023。

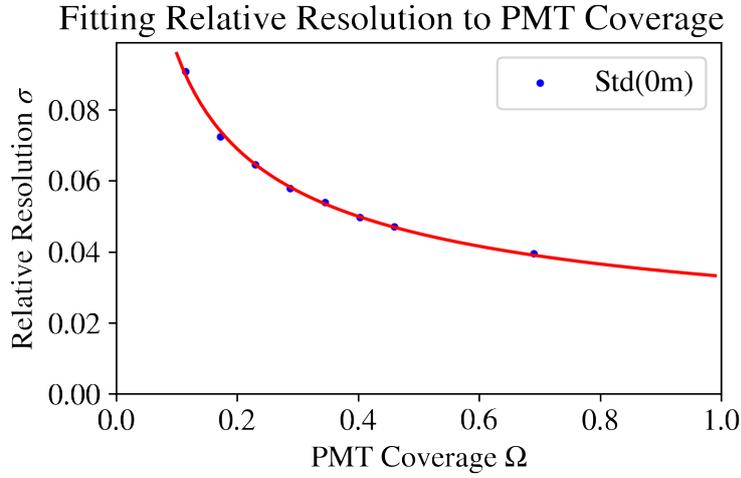


图 4.6 相对分辨率对 PMT 覆盖率拟合曲线

4.2 百吨探测器重建

百吨探测器模型仍在设计中，目前拟定液体闪烁体球半径 $R = 5\text{ m}$ ，PMT 中心排布半径 $R_s = 5.86\text{ m}$ 。现有的模型采用 AutoPMT 方法排布 PMT，取疏密因子 $f = 2.45$ ，计算可得共排布 6426 个 PMT。此外，亚克力球壳外围的液体屏蔽层由水换为了白油，其折射率与液体闪烁体相近，因此不再发生全反射。

百吨探测器的 0~5 阶 Legendre 系数 $\lambda_l(r)$ 随归一化半径 r' 的变化如图 4.7 所示，PE 数期望 E_{PE} 随顶点相对 PMT 位置 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布如图 4.8 所示。可以看出，由于没有了全反射现象， E_{PE} 分布整体变化平稳，不过在高阶系数上仍出现了小幅波动，这与大型探测器中电荷重建。

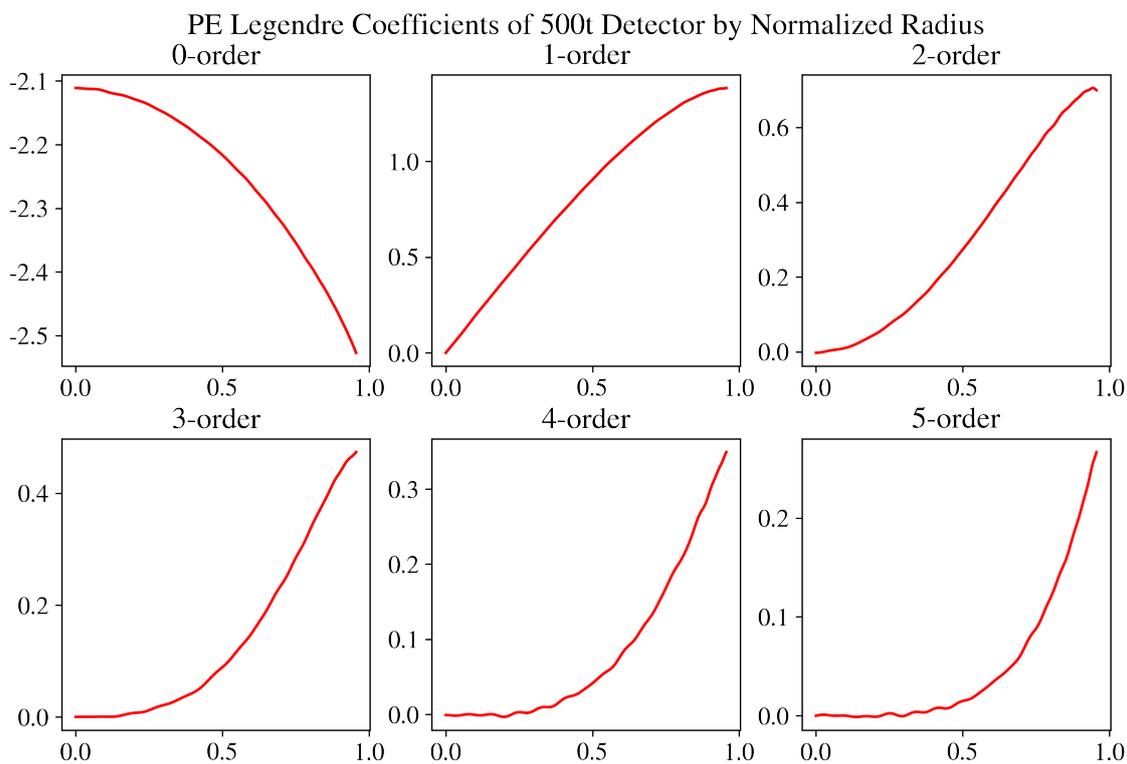


图 4.7 百吨探测器中 $\lambda_l(r)$ ($l = 0, 1, \dots, 5$) 随归一化半径 r' 的变化

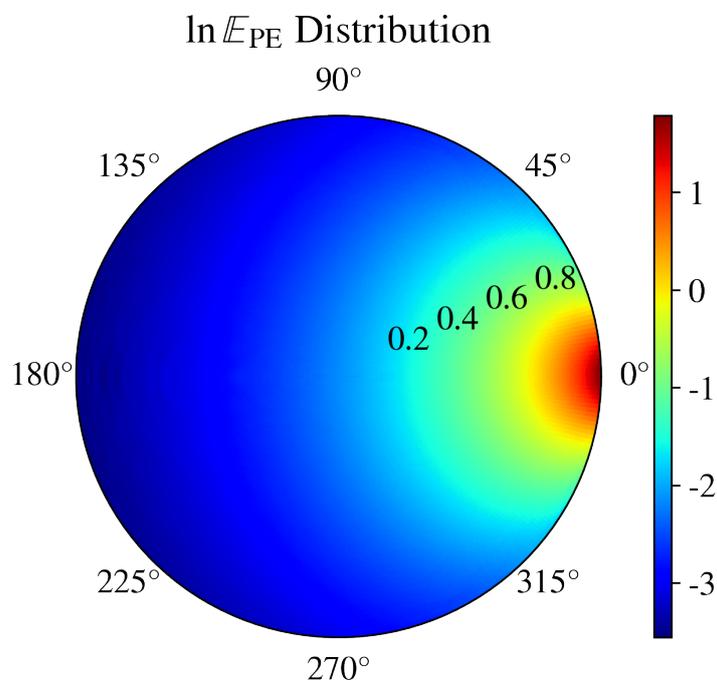


图 4.8 百吨探测器中 $\ln E_{PE}$ 随 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布

对 6426 个 PMT 下 AutoPMT 排布的百吨探测器进行模拟并重建，模拟条件为从探测器中心起，在每隔0.05 m的半径的球面上随机生成 2000 个事例，其余条件同前。重建的半径对比图、Std 和 Bias 变化图如图4.9、4.10所示。

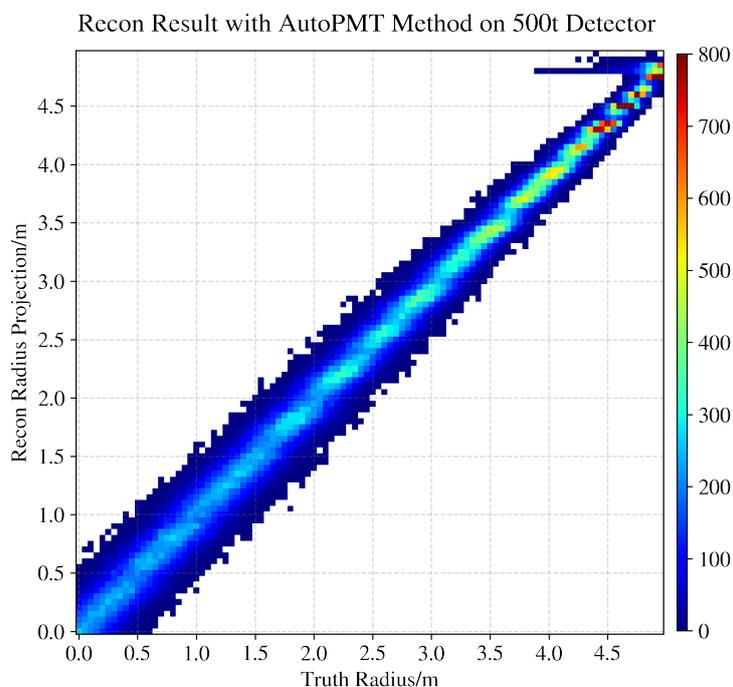


图 4.9 6426 个 PMT 下百吨探测器的 AutoPMT 排布的重建结果

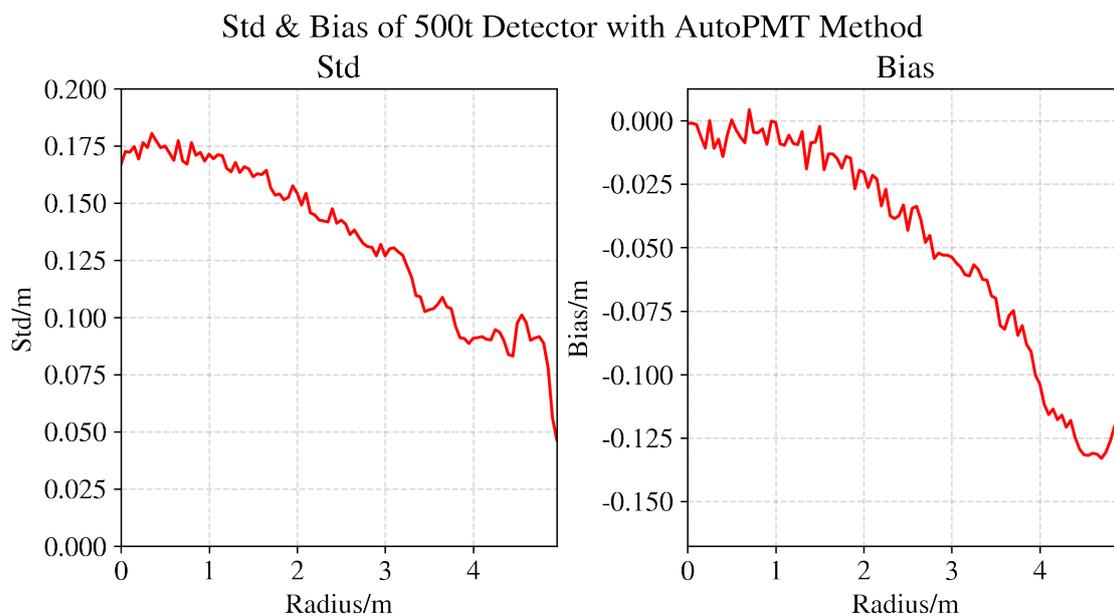


图 4.10 6426 个 PMT 下百吨探测器的 AutoPMT 排布的 Std 和 Bias

百吨探测器上述条件下的 AutoPMT 排布中, PMT 覆盖率达到了 49.6%。类似于上文对比不同排布、不同 PMT 数量下的重建结果, 对 1488、2976、6426 个 PMT 下 Fibonacci 排布的百吨探测器进行模拟并重建, 模拟条件同前, 其中 1488、2976 个 PMT 的覆盖率对应一吨原型机中 30、60 个 PMT 的覆盖率。重建结果的半径对比图、Std 和 Bias 变化图如图 4.11、4.12 所示。

Recon Result by Different PMT Numbers and Arrangement Methods on 500t Detector

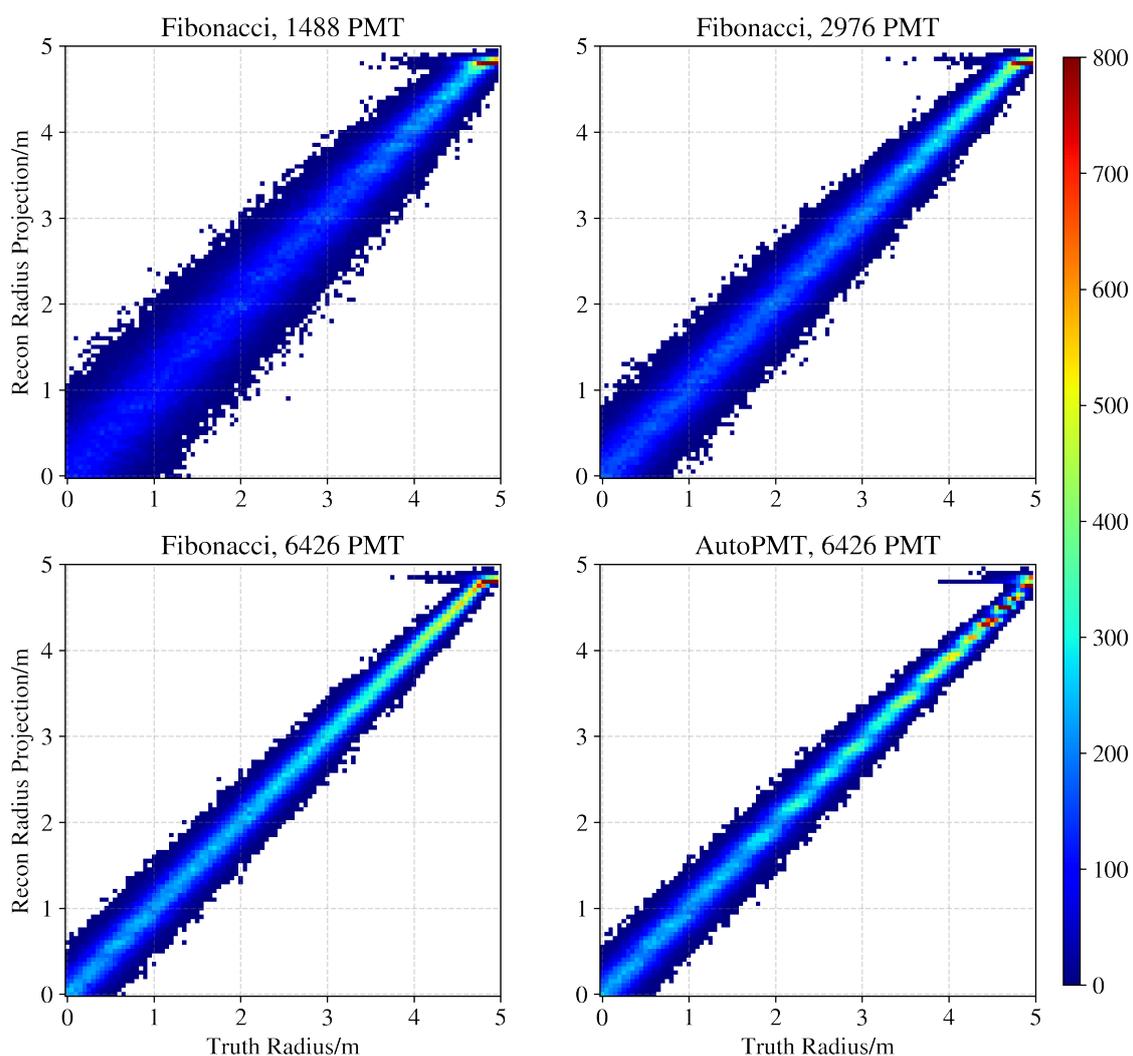


图 4.11 不同 PMT 数量下百吨探测器的 Fibonacci 排布的重建结果

Std and Bias by Different PMT Numbers and Arrangement Methods on 500t Detector

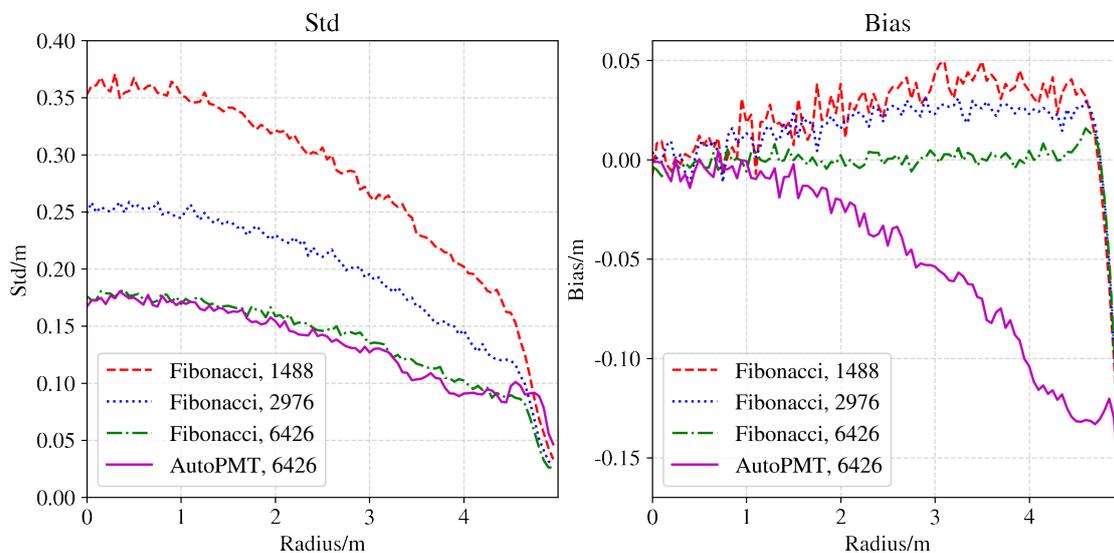


图 4.12 不同 PMT 数量下百吨探测器的 Fibonacci 排布的 Std 和 Bias 对比

可以得出如下结论：

- 仅用电荷信息进行球谐函数重建，在探测器中心的位置分辨率与 PMT 数量依然符合与式4-7形式相同的平方根反比关系。
- 由于没有了全反射现象，由靠近探测器边界引起的稀疏性的影响被放大，Bias 迅速增加。
- 在大型探测器的 PMT 排布中，Fibonacci 排布依旧具有比 AutoPMT 排布更好的性质。

第 5 章 结 论

截至目前，本文主要完成的工作有：

利用电荷信息进行球谐函数重建，并对重建中由 PMT 排布导致的现象加以分析，得出 PMT 的稀疏性是导致重建结果不可分辨的原因；

提出斐波那契网格排布，并提出了 PMT 排布的衡量指标，论证了斐波那契网格排布优于锦屏一吨原型机原有排布；

基于一吨原型机进行了两种排布下的重建、变 PMT 数量重建以及百吨重建，给出了分辨率与 PMT 覆盖率的量化关系。

有待改进的工作有：

改进球谐函数重建方法，包括选取更合适的函数基、改变优化器、优化算法等，尽可能避免局部极值的存在，从而降低重建结果不可分辨性；

全面解释利用电荷信息进行球谐函数重建中的现象，如重建结果出现了多处局域极小值的结构；

对一吨原型机中靠近上下管道处复杂的光学过程加以研究，同时适当改进 PMT 排布使其避开上下管道；

对百吨探测器进行变 PMT 数量重建，拟合得到百吨探测器中分辨率与 PMT 覆盖率之间的定量关系。

尚未完成的工作有：

由于大型探测器中时间信息比电荷信息更加重要且可靠，因此利用时间信息进行球谐函数重建并加以分析；

通过研究重建结果不可分辨性的消除条件，研究 PMT 排布的最低要求。

插图索引

图 1.1	锦屏一吨原型机结构示意图	1
图 1.2	JSAP 对锦屏一吨原型机的模拟模型	3
图 1.3	大型探测器中 PMT 排布方式.....	3
图 2.1	顶点 $\vec{r}(r, \theta)$ 与 PMT \vec{x}_i 相对位置	5
图 2.2	Legendre 多项式	6
图 2.3	一吨原型机中 $\lambda_l(r)$ ($l = 0, 1, \dots, 5$) 随归一化半径 r' 的变化	7
图 2.4	一吨原型机中 $\ln E_{PE}$ 随 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布	8
图 2.5	Jinping 排布示意图.....	9
图 2.6	Jinping 排布在 x、y、z 轴上的重建结果（未截断）	10
图 2.7	Jinping 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias（未截断）	10
图 2.8	Jinping 排布在 x、y、z 轴上的重建结果（作截断）	11
图 2.9	Jinping 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias（作截断）	12
图 3.1	Fibonacci 网格示意图 ($M = 30, 1000$).....	13
图 3.2	Fibonacci 网格示意图 ($\xi = \sqrt{2} - 1, 0.617, 0.619$)	14
图 3.3	Fibonacci 排布的均匀性在 Benedetto-Fickus Frame 理论中的验证.....	15
图 3.4	Fibonacci 排布示意图.....	15
图 3.5	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 x、y、z 轴上的重建结果对比.....	17
图 3.6	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 x、y、z 轴上的 Std 和 Bias 对比	18
图 3.7	球坐标系下轴向 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 示意图	19
图 3.8	Std($\cos \theta$) 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像.....	20
图 3.9	重建轴 $\vec{n}_{\min Std}$ 方位示意图	21
图 3.10	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min Std}$ 上的重建结果对比	21
图 3.11	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min Std}$ 上的 Std 和 Bias 对比.....	22
图 3.12	$\cos \theta$ 聚类数关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像	23
图 3.13	$\cos \theta$ 聚类数统计	23
图 3.14	重建轴 $\vec{n}_{\min Cluster}$ 方位示意图	24
图 3.15	重建轴 $\vec{n}_{\min Cluster}$ 上 $\cos \theta$ 分布.....	24
图 3.16	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min Cluster}$ 上的重建结果对比	24

图 3.17	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{Cluster}}$ 上的 Std 和 Bias 对比	25
图 3.18	$\max_i \cos \theta_i $ 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像	26
图 3.19	重建轴 $\vec{n}_{\max \min \cos }$ 方位示意图	26
图 3.20	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \max \cos }$ 上的重建结果对比	27
图 3.21	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \max \cos }$ 上的 Std 和 Bias 对比	27
图 3.22	不同半径下 E_{PE} 随 $\cos \theta$ 的变化	28
图 3.23	全反射区间内 $\cos \theta$ 关于 $\vec{n}(\vartheta, \phi)$ 图像	29
图 3.24	全反射区间内 $\cos \theta$ 数目统计	29
图 3.25	重建轴 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 方位示意图	30
图 3.26	重建轴 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 上 $\cos \theta$ 分布	30
图 3.27	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 上的重建结果对比	30
图 3.28	Jinping 排布和 Fibonacci 排布在 $\vec{n}_{\min \text{TIRPMT}}$ 上的 Std 和 Bias 对比	31
图 3.29	Jinping 排布的不同轴上真值的似然函数	32
图 4.1	60 个 PMT 下 AutoPMT 排布和 Fibonacci 排布示意图	35
图 4.2	不同 PMT 数量下不同排布方式的重建结果对比	36
图 4.3	不同 PMT 数量下不同排布方式的 Std 和 Bias 对比	37
图 4.4	不同 PMT 数量下 Fibonacci 排布的重建结果对比	38
图 4.5	不同 PMT 数量下 Fibonacci 排布的 Std 和 Bias 对比	39
图 4.6	相对分辨率对 PMT 覆盖率拟合曲线	40
图 4.7	百吨探测器中 $\lambda_l(r)$ ($l = 0, 1, \dots, 5$) 随归一化半径 r' 的变化	41
图 4.8	百吨探测器中 $\ln E_{\text{PE}}$ 随 $\vec{r}(r', \theta)$ 的分布	41
图 4.9	6426 个 PMT 下百吨探测器的 AutoPMT 排布的重建结果	42
图 4.10	6426 个 PMT 下百吨探测器的 AutoPMT 排布的 Std 和 Bias	42
图 4.11	不同 PMT 数量下百吨探测器的 Fibonacci 排布的重建结果	43
图 4.12	不同 PMT 数量下百吨探测器的 Fibonacci 排布的 Std 和 Bias 对比	44

参考文献

- [1] BEACOM J F, CHEN S, CHENG J, et al. Letter of intent: Jinping neutrino experiment[J/OL]. Chinese Physics C, 2017, 41(2): 023002. <http://dx.doi.org/10.1088/1674-1137/41/2/023002>.
- [2] WANG Z, WANG Y, WANG Z, et al. Design and analysis of a 1-ton prototype of the Jinping neutrino experiment[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2017, 855: 81-87. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900217303327>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2017.03.007>.
- [3] HAMAMATSU PHOTONICS K.K. E C. Photomultiplier tubes: Basics and applications [M/OL]. 3a ed. Hamamatsu Photonics K.K., Electron Tube Division, 2007. https://www.hamamatsu.com/resources/pdf/etd/PMT_handbook_v3aE.pdf.
- [4] AGOSTINELLI S, ALLISON J, AMAKO K, et al. Geant4—a simulation toolkit[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2003, 506(3): 250-303. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900203013688>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(03\)01368-8](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(03)01368-8).
- [5] BRUN R, RADEMAKERS F, CANAL P, et al. root-project/root: v6.18/02[CP/OL]. Zenodo, 2019. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3895860>.
- [6] ADAM T, AN F, AN G, et al. Juno conceptual design report[EB/OL]. 2015. <https://arxiv.org/abs/1508.07166>.
- [7] BOGER J, HAHN R, ROWLEY J, et al. The Sudbury Neutrino Observatory[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2000, 449(1): 172-207. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900299014692>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(99\)01469-2](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(99)01469-2).
- [8] ALIMONTI G, ARPESELLA C, BACK H, et al. The Borexino detector at the Laboratori Nazionali del Gran Sasso[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2009, 600(3): 568-593. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020801601X>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2008.11.076>.
- [9] BUSENITZ J, WOLF J, ALIVISATOS P, et al. Proposal for US participation in KamLAND[Z]. 1999.
- [10] DOU W, ZHOU J, XU B. Vertex reconstruction of point source by spherical harmonics in detectors with total internal reflection effect[J]. Journal of Instrumentation, 2021.

- [11] LIU Q, HE M, DING X, et al. A vertex reconstruction algorithm in the central detector of juno [J/OL]. *Journal of Instrumentation*, 2018, 13(09): T09005–T09005. <http://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/13/09/T09005>. DOI: 10.1088/1748-0221/13/09/t09005.
- [12] HASTIE T, TIBSHIRANI R. Varying-coefficient models[J/OL]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1993, 55(4): 757-779. <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1993.tb01939.x>. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1993.tb01939.x>.
- [13] GONZÁLEZ A. Measurement of areas on a sphere using fibonacci and latitude – longitude lattices[J/OL]. *Mathematical Geosciences*, 2009, 42(1): 49–64. <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-009-9257-x>.
- [14] BENEDETTO J J, FICKUS M. Finite normalized tight frames[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2003, 18(2): 357-385.
- [15] APOLLONIO M, BALDINI A, BEMPORAD C, et al. Search for neutrino oscillations on a long base-line at the chooz nuclear power station[J/OL]. *The European Physical Journal C*, 2003, 27(3): 331–374. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2002-01127-9>.
- [16] GALBIATI C, MCCARTY K. Time and space reconstruction in optical, non-imaging, scintillator-based particle detectors[J/OL]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2006, 568(2): 700–709. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2006.07.058>.

致 谢

本科时光如白驹过隙，转瞬间我已经被生活裹挟着，站在人生的十字路口处，思考自己未来何去何从。回首校园生活，百味杂陈。

感谢我的导师续本达老师。续老师一直给我以学识丰富的极客形象，且待人态度十分和善。我曾被人说起是以学术“追星”的心态才追随的续老师，此话不假。续老师总能以更开阔的视角看待事物，对同学们各方面的问题作出解答，有朝一日成为续老师一样的人也是我的梦想。

感谢窦威学长的指导，球谐函数重建的方法即由他提出。窦威学长是带我入门重建工作的引路者，也会经常解答我的大小问题，在关键问题上同我讨论。愿他博士研究一切顺利。

感谢母校培育。我时常以自己未能达到心目中清华的育人期望而遗憾，但自始至终致力于自主学习与成长，同时以自身所长帮助他人，也算是无愧于母校厚待我五年。祝福清华。

感谢女友倪雨歆，陪伴我度过最忙碌的毕业季，领我见识不同的风景、体悟不同的道理，给我的大学回忆增添了一抹非凡的亮色。感谢至今仍保持密切联系的同班同学、学生会同学，我会时常想念那些欢乐的旧时光。

感谢我的父母、我的家庭。平日里我不善于流露感情，因为三人各自忙碌而疏于联系，但我知道，他们始终是最坚实的后盾。

向 JSAP、ThuThesis 等软件的贡献者致意。

声 明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 齐博远 日 期： 2021年6月7日

附录 A 外文资料的调研阅读报告

大型探测器中 PMT 排布调研报告

本部分内容调研了部分大型探测器的整体结构和 PMT 排布，以探测器性质和 PMT 排布方式指导锦屏百吨实验 PMT 排布。

A.1 JUNO

如图A.1所示,江门中微子实验(The Jiangmen Underground Neutrino Observatory, JUNO)^[1]的中心探测器为一直径35.4 m的亚克力球承装20 000 t以 LAB (线性烷基苯) 为溶剂、以 PPO (2,5-二苯基恶唑, $C_{15}H_{11}NO$) 为溶质的有机液体闪烁体,亚克力球外侧为7 000 t的矿物油作为屏蔽层。17000 个20 inch的 PMT 被尽可能紧密地排布在直径40 m的球面上,覆盖率达到了约 75% (另一种方案是以 16000 个 PMT 达到覆盖率 70%), 今后还可能继续考虑用3 inch的小 PMT 填补大 PMT 之间的空隙。此外, 外侧还安放有 2000 个8 inch的否决 PMT。

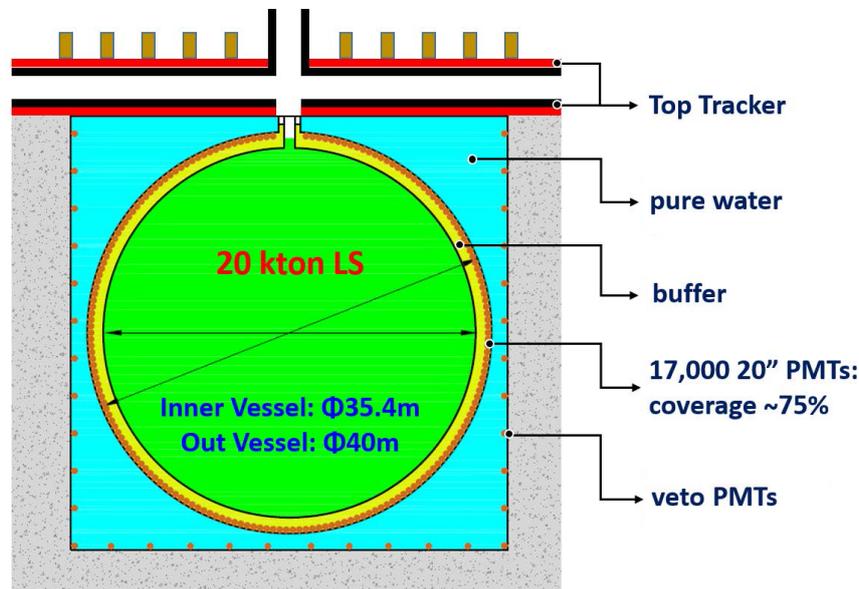
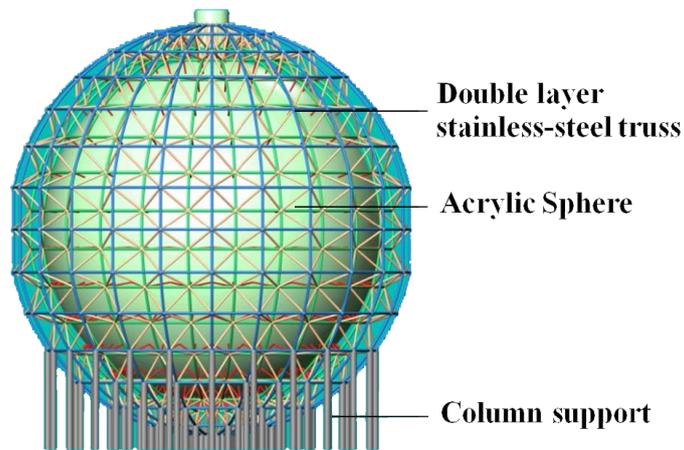
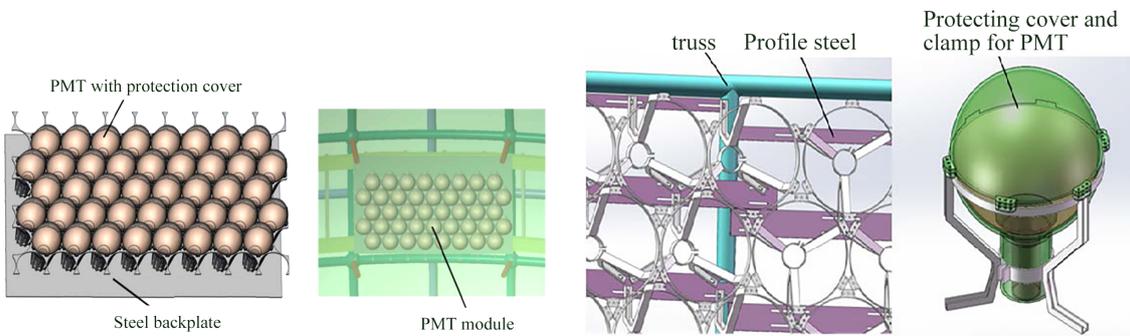


图 A.1 整体结构示意图

PMT 使用模块化安装,如图A.2所示,目前有两种可选模块化安装方法:一种是将 PMT 成组安装在不锈钢板上,另一种是将 PMT 逐个安装在异性不锈钢支架上。这两种方法的 PMT 排布都计划以蜂窝状网格最密堆积。



(a) PMT 支撑结构示意图



(b) PMT 安装在钢板上

(c) PMT 安装在钢支架上

图 A.2 JUNO 结构示意图

A.2 KamLAND

如图A.3所示，KamLAND 实验^[2]中，质量约1 000 t的液体闪烁体盛装在直径13.7 m的透明球壳中，液体闪烁体以PC（1,2,4-三甲苯， $C_6H_3(CH_3)_3$ ）为溶质、以PPO为溶剂，球壳的材质为尼龙/EVOH/尼龙三层材料复合。外侧由厚度约2.5 m的油屏蔽层包裹。1922个Hamatsu R7250 17 inch PMT 排布在直径18 m的不锈钢球壳上，光阴极覆盖率约为30%。不锈钢球的外侧安装有800个Hamatsu R3602 20 inch 否决PMT。与其他大尺寸PMT相比，Hamatsu R7250 PMT显著降低了渡越时间离散（transit time spread, TTS）。

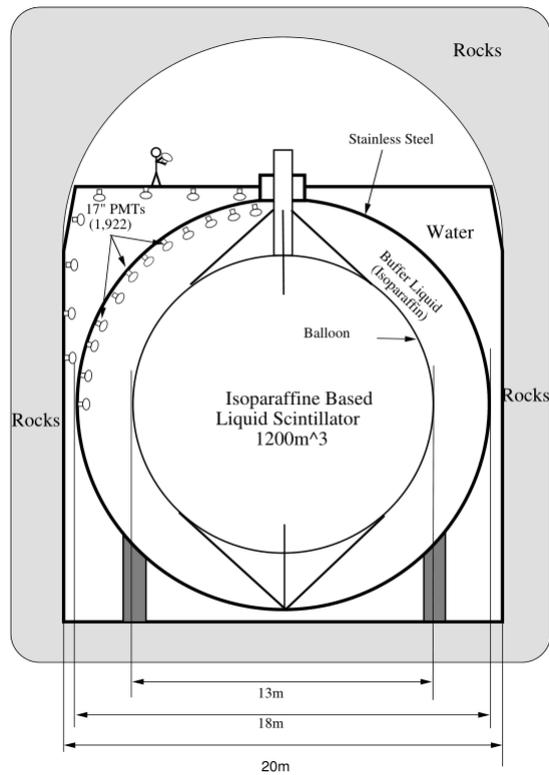


图 A.3 整体结构示意图

KamLAND 的 PMT 采用正六边形网格结构排列，如图A.4所示。图A.4(b)展示了其中一半的 PMT。

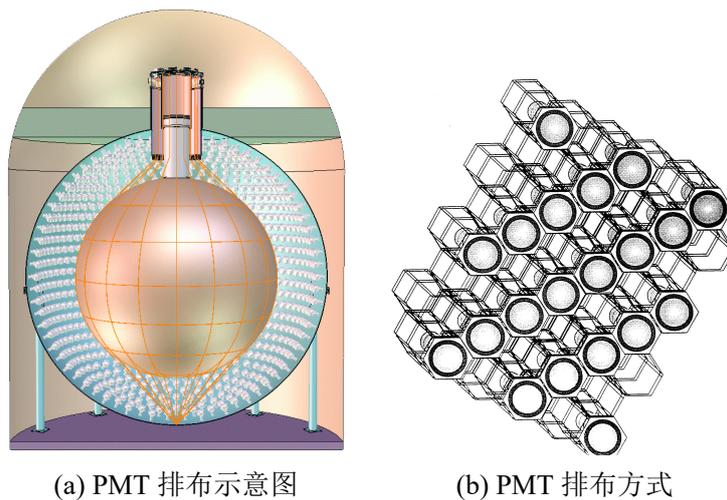


图 A.4 KamLAND 结构示意图

KamLAND-Zen 实验^[3] 是对于 KamLAND 实验的改进。如图A.5所示，探测器的中心加入了一个直径3.08 m的、由25 μm厚的透明尼龙薄膜制成的气球，内部盛

有13 t溶解了300 kg¹³⁶Xe 的烷基液闪。1325 个17 inch PMT 和 554 个20 inch PMT 排布在直径18m的不锈钢球内表面，光阴极覆盖率达到 34%。不锈钢球外侧是由3 200 t超纯水作为探测介质的水-切伦科夫探测器，由 225 个20 inch PMT 进行探测。

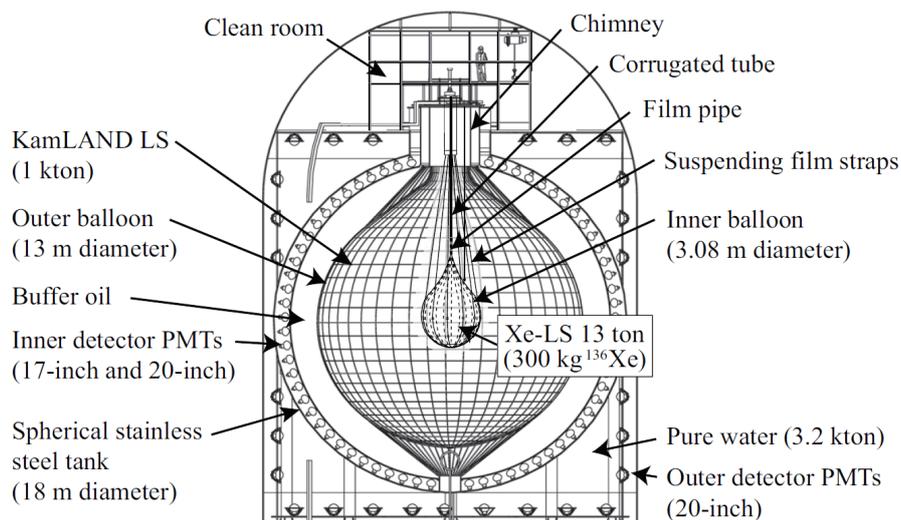


图 A.5 KamLAND-Zen 结构示意图

A.3 Borexino

如图A.6所示，在 Borexino 实验^[4]中，半径6.85 m的不锈钢球用于盛容液体闪烁体，同时作为 PMT 的机械支撑，外部封闭在一充满纯净水的水箱中。在不锈钢球内，半径4.25 m、5.50 m的尼龙球壳将液体闪烁体分为三部分。最内部的球的液体闪烁体成分为 PC/PPO；第二层和第三层液体闪烁体含有少量 DMP（邻苯二甲酸二甲酯， $C_6H_4(COOCH_3)_2$ ）作为光猝灭剂，用以进一步降低 PC 的闪烁率。

2212 个8 inch ETL 9351 PMT 被均匀地排布在不锈钢球内表面，除了其中的 384 个 PMT 以外，其余的 PMT 都配备了聚光器。PMT 配备聚光器用以否决液体闪烁体主动产生的光子，从而降低了屏蔽层或 PMT 产生的本底；未配备聚光器的 PMT 则用于研究该本底。从图A.6(b)中可以看出，PMT 按照环状规律排布，相邻的某几层 PMT 数量相等。不锈钢球外侧填充有4 500 m³的超纯水，并且安放了 208 个用于探测 μ 子的 PMT。

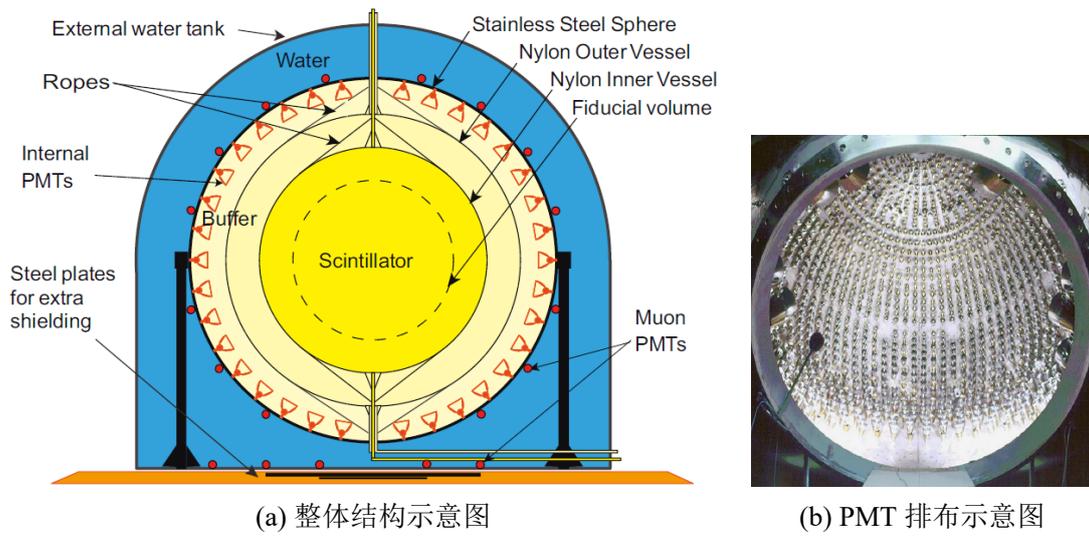


图 A.6 Borexino 结构示意图

A.4 SNO

萨德伯里中微子实验 (The Sudbury Neutrino Observatory, SNO)^[5] 的结构如图A.7所示，探测器介质为由直径12 m的亚克力球壳盛放的约 1 000 t重水。亚克力球壳外侧直径17.8 m的支撑结构用于安装 PMT，亚克力球壳与 PMT 支撑结构之间填充有轻水以提供屏蔽作用。选择探测器形状为球形的原因包括最佳的比表面积、最佳的应力分布等，从而得以降低支撑结构质量，降低本底。

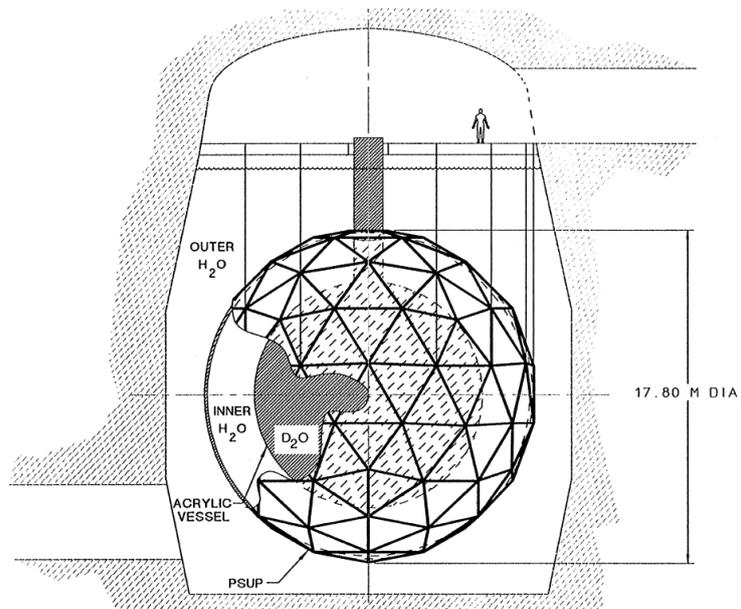


图 A.7 SNO 结构示意图

PMT 整体排布在半径8.89 m的三频二十面体 (3-frequency icosahedron) 上, 此处的三频指将二十面体的每个三角形面的每条边分为三部分。每个 PMT 被固定在正六边形组件上, 每个阵列由 7~21 个 PMT 组件构成, 固定在支撑结构上。

SNO 选用了8 inch的 Hamamatsu R1408 PMT。9438 个 PMT 用于探测切伦科夫光子, PMT 光阴极覆盖率达 31%; 每个 PMT 上又安装了一直径为27 cm的聚光器, 使得覆盖率提高到 54%。

SNO+^[6]在 SNO 的基础上, 将探测器介质从1 000 t的重水换成了780 t的 LAB/PPO 有机液体闪烁体, 这大大增加了光产额, 给测量低能信号提供了条件。

参考文献

- [1] ADAM T, AN F, AN G, et al. Juno conceptual design report[EB/OL]. 2015. <https://arxiv.org/abs/1508.07166>.
- [2] BUSENITZ J, WOLF J, ALIVISATOS P, et al. Proposal for us participation in kamland[Z]. 1999.
- [3] ASAKURA K, GANDO A, GANDO Y, et al. Search for double-beta decay of ¹³⁶Xe to excited states of ¹³⁶Ba with the kamland-zen experiment[J/OL]. Nuclear Physics A, 2016, 946: 171–181. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2015.11.011>.
- [4] ALIMONTI G, ARPESELLA C, BACK H, et al. The borexino detector at the laboratori nazionali del gran sasso[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2009, 600(3): 568–593. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016890020801601X>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2008.11.076>.
- [5] BOGER J, HAHN R, ROWLEY J, et al. The sudbury neutrino observatory[J/OL]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2000, 449(1): 172–207. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900299014692>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(99\)01469-2](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(99)01469-2).
- [6] ANDRINGA S, ARUSHANOVA E, ASAH I S, et al. Current status and future prospects of the sno+ experiment[J/OL]. Advances in High Energy Physics, 2016, 2016: 1–21. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/6194250>.

综合论文训练记录表

学生姓名	齐博涵	学号	2016011651	班级	工物 71	
论文题目	锦屏百吨实验 PMT 排布研究					
主要内容以及进度安排	第 1~3 周	问题背景调研，了解重建方法，熟悉软件环境				
	第 4 周	开题报告；提出斐波那契排布				
	第 5~6 周	熟悉 JSAP 中几何结构文件与 PMT 排布，熟悉重建程序				
	第 7 周	进行 Jinping 与 Fibonacci 排布的模拟与重建，比较重建结果				
	第 8~9 周	中期检查；提出 PMT 排布衡量指标，进行多指标下 Jinping 与 Fibonacci 排布的重建，比较重建结果				
	第 10 周	分析重建结果，解释 PMT 排布对重建的影响				
	第 11 周	研究并改良重建程序				
	第 12 周	进行百吨探测器模拟与重建				
	第 13 周	研究分辨率与 PMT 排布的关系				
	第 14 周	研究消除不可分辨性与 PMT 排布的关系，撰写论文				
	第 15 周	论文答辩，撰写论文				
			指导教师签字：		续申达	
			考核组组长签字：		王强	
			2021 年 3 月 17 日			
	中期考核意见	研究工作正常进行。				
		考核组组长签字：		王强		
		2021 年 4 月 14 日				

<p>指导教师评语</p>	<p>作者提出了PMT排列的Fibonacci法，在锦屏-1吨和百吨探测器实现并评估了它的优势，对锦屏中微子实验乃至其它液闪探测器有重要指导意义</p> <p>指导教师签字： <u>徐昶</u></p> <p>2021年6月3日</p>
<p>评阅教师评语</p>	<p>对PMT的科学排列可以确保锦屏中微子实验对中微子反应事例的重建精度。这项研究在过去的实验中没有开展过。因此该论文的工作具有较好的创新性。</p> <p>评阅教师签字： <u>陈少波</u></p> <p>2021年6月3日</p>
<p>答辩小组评语</p>	<p>研究工作达到了初步的阶段性的目标。</p> <p>答辩小组组长签字： <u>王焱</u></p> <p>2021年6月3日</p>

总成绩： A⁻

教学负责人签字： 高焱

2021年6月10日